یادآوری مفاهیم پایه

جبر اعداد حقیقی

در این فصل به مرور مهم‌ترین مطالبی می‌پردازیم که در مباحث حساب دیفراسیل و انتگرال بدان محتاج هستیم. این مطلب مشتمل بر مروری مجدّد بر خواص اعداد حقیقی است که دانش‌آموزان از دوره‌ی تابستان به بعد با آن آشنا شده‌اند.چنانچه شما در مطالعه‌ی حسابان و دروس پیش از آن به اندازه‌ی کافی با این مباحث آشنا شده باشید، می‌توانید آنها را به سرعت مرور کنید؛ با این حال باید یادآوری کنیم که تسلّط بر این مفاهیم، به ویژه خواص ترتیبی اعداد لازمه و پیش شرط درک بهتر و مؤثر مفاهیم و مباحث این درس می‌باشد. در واقع درک علمی این درس، که خود مقدمه دروس عالی‌تر ریاضیات نظیر آنالیز ریاضی است، بر دو مؤلفه‌ی مهم و استوار است: یکی تسلط بر خواص نابرابری‌ها و دیگری آشنا شدن با شیوه‌های این درس که مبتنی بر روش‌های تجزیه و تحلیل و ترکیب منطق‌وار داده و نتایج آنها است.

۱-۱ اعداد حقیقی و خط حقیقی

می‌دانیم که حسابان بر خواص دستگاه اعداد حقیقی استوار است. منظورمان از دستگاه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، اعمال جمع و ضرب این مجموعه و خواص جبری آن است. اعداد حقیقی اعدادی هستند که بتوان آنها را به صورت اعشاری یا تقریب اعشاری بیان کرد.

برای نمونه هر یک از اعداد ذیل یک عدد حقیقی است.

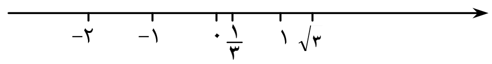
$$۵ = ۵/۰۰۰۰۰۰\ldots$$
$$-\frac{۳}{۴} = -۰/۷۵۰۰۰۰۰۰\ldots$$
$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۰۰۰\ldots$$
$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۰۰۰\ldots$$
$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۰۰۰\ldots$$

در هر حالت، منظور از سه نقطه «. . .» آن است که دنباله ارقام همیشه ادامه دارد.البته وقتی دنباله ارقام تکراری و از جایی به بعد همیشه برابر صفر باشند از نوشتن آنها صرف‌نظر می‌گردد.

$$۵ = ۵ \qquad \frac{۳}{۴} = -۰/۷۵$$

اما برای سه عدد بعدی چنین نیست. تفاوت اساسی در باب این اعداد وجود دارد، برای سه تای اولی الگوی تکرار ارقام بدیهی و روشن است و دنباله‌ی ارقام بر ما معلوم می‌باشد. لکن برای $\sqrt{۲}$ و π هیچ الگوی شناخته شده‌ای برای روند تکرار ارقام وجود ندارد. سه عدد نخست را گویا و دو تای آخر یعنی $\sqrt{۲}$ و π را گنگ یا اصم می‌نامیم. بنابراین اعداد حقیقی به دو دسته‌ی بزرگ یعنی اعداد گویا و اعداد گنگ تقسیم می‌شوند. نکته‌ی جالب‌تر آن است که هر دو دسته به گونه‌ای بسیار فشرده و در کنار هم با هم به نوعی تنیده شده‌اند.

به زبان هندسی، اعداد حقیقی را می‌توانیم به صورت نقاط یک خط مستقیم نشان دهیم. چنین خط مستقیمی را خط حقیقی یا محور حقیقی می‌نامیم. هر عدد حقیقی، چه گویا و چه گنگ، متناظر نقطه‌ای بر این خط است و بر عکس هر نقطه‌ی این خط نظیر یک و تنها یک عدد حقیقی است. (شکل ۱-۱)



شکل ۱-۱

خواص اعداد حقیقی را می‌توان در سه رده دسته‌بندی کرد: (۱) خواص جبری. (۲) خـواص ترتیـب. (۳) خـواص مربـوط بـه پیوستاری اعداد حقیقی. شما در طول تحصیلتان، حتی از دوره‌ی ابتدایی با خواص جبری اعداد حقیقی آشنایی دارید. امّا بایـد گفت که آشنایی شما بیشتر جنبه‌ی تجربی داشته تا صورت ریاضی! چرا؟

برای نمونه، شما می‌دانید که مثلاً جمع اعداد خاصیت جابه‌جایی دارد:

$$۲+۳=۳+۲$$
$$-۱+۴=۴+(-۱)=۴-۱$$
$$۲+(\sqrt{۳}+\frac{۱}{۲})=(۲+\sqrt{۳})+\frac{۱}{۲}$$

امّا برقراری این‌گونه تساوی‌ها از راه تجربه حاصل شده است. در واقع تساوی‌های موردی مانند تساوی‌هـای فـوق نیـاز بـه برهان و استدلال نداشته است. امّا وقتی اینگونه خواص اعداد را بخواهیم در قالب یک کلّیت و بـه شـکل یـک حکـم کلـی ریاضی بیان کنیم دیگر با تجربه درستی آنها بر ما معلوم نخواهد شد.

چرا؟

بهتر است صورت کلی چنین تساوی‌هایی را بیان داریم. به ناچار محتاج استفاده از حروف خواهیم شد:

همواره $a+b=b+a$

یا آنکه بگوییم:

برای هر دو عدد $a\,,\,b$, $a+b=b+a$

به زبان عادی منظورمان این است که برای هر دو عدد حقیقی $a\,,\,b$ حاصل جمع a با b با حاصل جمع b با a برابر است.

به عبارت «برای هر دو عدد حقیقی $a\,,\,b$» توجه کنید. اگر ما برای یکصد زوج از اعداد حقیقی، یا یک میلیون زوج از اعداد $a\,,\,b$ ، حاصل دو طرف را حساب کرده و متوجه درستی تساوی‌ها شویم، درستی حکم کلی را محقق نساخته‌ایـم؛ دلیـل آن نامتناهی بودن و به اصطلاح عامیانه بی‌پایان بودن مجموعه اعداد حقیقی است. یکصد سال، یـک میلیـون سـال و یـا چنـد میلیارد سال که وقت صرف کنیم، تجربه کنیم ادعایمان محقق نمی‌شود زیرا مجموعه اعداد حقیقی بی‌پایان، نامتناهی است.

زیاد ناراحت نباشید! ظاهراً راه‌حل ساده‌ای وجود دارد و آن وضع تئوری‌وار مجموعه اعداد حقیقـی بـه صـورت سـامان یافتـه می‌باشد که آن را دستگاه اعداد حقیقی می‌نامیم. این راه‌حل ساده از این قرار است که وقتی برای درستی یک حکـم نتـوانیم دلیلی مستدل و منطقی اقامه کنیم و یا آنکه به عللی اصولاً نخواهیم دلیلی بیاوریم، آن حکم را تحت عنـوان اصـل موضـوع (اصل) و یا بنداشت مطرح می‌کنیم. بنابراین بنداشت حکم یا گزاره‌ای است که آن را بدون دلیل و برهان می‌پذیریم.

البته شواهد تجربی برای بسیاری موارد الهام بخش ریاضیدانان و واضع‌کننده تئوری‌ها در انتخـاب بنداشـت‌هـای آن تئـوری است.

خلاصه کلام آنکه شما تاکنون با خواص جبری اعداد حقیقی به صورتی تجربی آشنا شده‌اید. چنـین خـواص مـدعی‌انـد کـه اعداد حقیقی، را می‌توان با هم جمع کرد و حاصل عددی حقیقی خواهد بود. اعداد حقیقی را می‌توان بـا هـم ضـرب کـرد و حاصل عددی حقیقی است. همچنین قواعد معمول حساب، از جمله دو قاعده فوق‌الاشاره، برقرارند. اینک برخی از این احکام را در قالب بنداشت بیان می‌داریم.

مجموعه اعداد حقیقی را در مابقی این کتاب به R نشان می‌دهیم.

۱-۲ بنداشت‌های جمعی

(ج۱) در R یک عمل دوتایی وجود دارد که آن را جمع می‌نامیم. این عمل که در واقع یک تابع است بـا نِمـاد + نشـان داده می‌شود. مقدار این تـابع را بـه ازای زوج مرتـب (a , b) بـه $a + b$ نشـان مـی‌دهـیم کـه در آن b , a و $a + b$ اعـداد حقیقی‌اند. لذا حاصل جمع بر هر زوج از اعداد حقیقی خود یک عدد حقیقی است.

(ج ۲) برای هر دو عدد حقیقی y , x داریم.

$$x + y = y + x$$

این بنداشت را خاصیت جابه‌جایی جمع می‌نامیم.

(ج ۳) برای هر سه عدد حقیقی z , y, x داریم

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

این بنداشت را خاصیت شرکت‌پذیری R می‌نامیم.

(ج ۴) وجود عضو همانی جمع. R شامل عددی است به نام ۰ (صفر)، به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x و

$$x + ۰ = x$$

(ج ۵) وجود عضو قرینه ، به ازای هر عدد حقیقی x عضوی از مانند y وجود دارد به طوری که

$$x + y = ۰$$

با استفاده از این پنج بنداشت، می‌توانیم خواص اعداد حقیقی را به دست آوریم. اکنون در واقـع مـا بـا یـک دسـتگاه جبـری سروکار داریم، یعنی مجموعه اعداد حقیقی R به انضمام یک عمل دوتایی که در بنداشت‌هـای فـوق صـدق مـی‌کنـد. ایـن دستگاه جبری را همچنان که قبلاً نیز گفته‌ایم **دستگاه اعداد حقیقی** می‌نامیم. اینک به عنوان نمونه برخی نتایج منطقی را در باب R اثبات می‌کنیم.

مثال ۱ ـ ثابت کنید عضو o از R منحصر به فرد است.

حل ـ فرض کنیم $o_۲ , o_۱$ هر دو نقش صفر یعنی عضو همانی جمع R را داشته باشند. دراین صورت

$o_۱ = o_۱ + o_۲$　　(با توجه به همانی بودن $o_۲$)

$= o_۲ + o_۱$　　(با توجه به خاصیت جابه‌جایی)

$= o_۲$　　(با توجه به همانی بودن $o_۱$)

شما نیز می‌توانید برخی از خواص اعداد حقیقی را ثابت کنید.

فعالیت کلاسی

ثابت کنید عضو قرینه هر عدد حقیقی منحصر به فرد است

برهان- فرض کنیم $y_۲ , y_۱$ هر دو قرینه عدد حقیقی x باشند. در این صورت

$y_۲ = y_۱ + ۰$　　(با توجه به ج ۴)

$= y_۲ + (x + y_۱)$　　(با توجه به ج ۵)

$= (y_۲ + x) + y_۱$　　(با توجه به ج ۳)

$= ۰ + y_۱$　　(با توجه به ج ۵)

$y_۱$　　(با توجه به ج ۲ ، ج ۳)

معمولاً قرینه‌ی عدد حقیقی x با نِماد $-x$ و همچنین حاصل‌جمع $x + (-y)$ را به شکل ساده $x - y$ را بـه شـکل ساده $x - y$ می‌نویسیم و آن را تفاضل x, y می‌نامیم.

به مثال دیگری از خواص اعداد حقیقی توجه می‌کنیم.

مثال ـ برای هر دو عدد حقیقی y, x ثابت کنید.

$$-(x+y)=-x-y$$

حل ـ منظور از $-(x+y)$ قرینه $x+y$ است. پس باید نشان بدهیم که

$$(x+y)+(-x-y)=۰$$

داریم:

$$\begin{aligned} x+y+(-x-y) &= (x+y)+(-x-y) && \text{(جابه‌جایی جمع)} \\ &= y+[(x-y)-y)] \\ &= y+(۰-y) && \text{(شرکت‌پذیری!)} \\ &= y+(-y) \\ &= ۰ \end{aligned}$$

فعالیت کلاسی ـ

۱- ثابت کنید برای هر عدد حقیقی $-(-x)=x, x$

۲- برای هر سه عدد حقیقی z, y, x

اگر $x+z=y+z$ آنگاه $x=y$

(قانون حذف)

۱-۳ ضرب اعداد حقیقی

از تجربیات‌مان می‌دانیم که ضرب دو عدد حقیقی عددی است. این ویژگی را به عنوان یک بنداشت می‌پذیریم. به علاوه برخی از ویژگی‌های دیگر اعداد حقیقی را در رابطه با عمل ضرب نیز به عنوان بنداشت می‌پذیریم از آن جمله

برای هر سه دو عدد حقیقی y, x $\quad xy=yx$

برای هر سه عدد حقیقی z, y, x $\quad x(yz)=(xy)z$

عددی به نام یک (با نِماد ۱) وجود دارد به قسمتی که $۰\neq۱$ و برای هر عدد حقیقی $x\times۱=x, x$

برای هر عدد حقیقی غیر صفر مانند x ، عددی حقیقی مانند y وجود دارد به قسمتی که $xy=۱$

y را وارون x می‌نامیم.

در رابطه با عمل جمع، خاصیت زیر، به عنوان خاصیت توزیع‌پذیری ضرب روی جمع برقرار است.

$$x(y+z)=xy+xz$$

البته منظورمان حکم کلی است و گرنه در باب اعداد خاص، بارها درستی (*) را تجربه کرده‌ایم. به طور کلی وقتی حکمی مانند (x) بر حسب حروف بیان می‌شود منظور حکم کلی است. در واقع (*) صورت ساده‌تر حکم زیر است.

برای هر سه عدد حقیقی z, y, x $\quad x(y+z)=xy+xz$

اکنون، با داشتن این احکام می‌توانیم برخی از ویژگی‌های ضرب R را ثابت کنیم.

مثال ۱ ـ وارون هر عدد حقیقی (غیر صفر) منحصربه‌فرد است.

فرض کنیم $y_۲, y_۱$ هر دو وارون x باشند.پس

$$xy_۱=۱ \text{ و } xy_۲=۱$$

می‌نویسیم:

$$y_۱=y_۱\times۱=y_۱(xy_۲)=(y_۱x)y_۲=(xy_۱)y_۲=۱y_۲=y_۲$$

بنابراین حق داریم وارون x را با نِماد ۱- نشان می‌دهیم.گاهی وارون x را با $\frac{۱}{x}$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال ۲ ـ وارون وارون x برابر x است، به زبان نِمادی

$$(x^{-۱})^{-۱} = x$$

باید نشان دهیم $(x^{-۱})\ \ x = ۱$ تا طبق تعریف x نقش وارون $x^{-۱}$ را داشته باشد، اما این تساوی خود طبق تعریف وارون برقرار است.

قرارداد ـ حاصل ضرب $x.\frac{۱}{y}$ را به شکل ساده‌تر $\frac{x}{y}$ می‌نویسیم ، $\frac{x}{y}$ در واقع حاصل تقسیم x بر y می‌باشد.

فعالیت کلاسی

۱- ثابت کنید برای هر سه عدد حقیقی z, y, x ,

$$x(y - z) = xy - xz$$

۲- ثابت کنید هر گاه $xy = ۰$ انگاه $x = ۰$ یا $y = ۰$ و عکس این حکم نیز برقرار است.

۳- برای هر دو عدد حقیقی x و y ،

الف) $$x(-y) = (-x)y = -(xy)$$

ب) $$(-x)(-y) = xy$$

۱-۴ بسط اعشاری اعداد گویا

بسط اعشاری یک عدد گویا، یک عدد اعشاری نظیر

$$\frac{۳}{۲} = ۱/۵ \quad و \quad \frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$$

و یا یک تقریب اعشاری پایان‌ناپذیر متناوب ساده یا مرکب است نظیر

یک تقریب اعشاری متناوب ساده $$\frac{۲}{۳} = ۰/۶۶۶۰۰۰ = ۰/\overline{۶}$$

یک تقریب اعشاری متناوب مرکب $$\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۳۰۰۰ = ۰/۸\overline{۳}$$

در تقریب اعشاری متناوب ساده و یا مرکب دسته ارقامی که مرتب تکرار می‌شوند را **دوره گردش** عدد نامند و بالای ارقـامی که دوره گردش‌اند خط کشیده شده است و تعدادی رقم که بین دوره گردش و ممیز قرار دارند ارقام غیر گردش نامیده می‌شوند

$$\frac{۷}{۱۳} = ۰/\overline{۵۳۸۴۶۱} \quad و \quad \frac{۱}{۵۶} = ۰/۰۰۱۷\overline{۸۵۱۴۲}$$

نتیجه ـ اگر یک تقریب اعشاری متناوب (ساده یا مرکب) داشته باشید. می‌توانید از فرمول زیر، کسر یا عدد گویای مسـاوی آن را به دست آورید.

فرض کنید $a_۱a_۲...a_m$ ارقام غیر گردش و $b_۱b_۲...b_n$ ارقام دوره‌ی گردش عدد باشند، در این صورت:

$$۰/a_۱a_۲...a_m\overline{b_۱b_۲...b_n} = \frac{a_۱a_۲...a_mb_۱b_۲...b_n - a_۱a_۲..._m}{\underbrace{۹۹...۹}_{n}\underbrace{۰۰...۰}_{m}}$$

مثال‌های زیر، نحوه استفاده از فرمول (۱) را نشان می‌دهند.

$$۰/۰\overline{۱۷۸۵} = \frac{۱۷۸۵-۱}{۹۹۹۰۰} = \frac{۴۴۶}{۲۴۹۷۵} \qquad ۰/\overline{۶} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$$

هر تقریب اعشاری که متناوب (ساده یا مرکب) نباشد گنگ یا اصم نامیده می‌شود.بنابراین اعداد گنگ، اعـدادی هسـتند کـه بسط اعشاری آنها بی‌پایان است ولی متناوب نیستند. مانند:

$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲...$

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳...$ عدد پی

$e = ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۴...$ عدد نِپِر

قضیه ۱: اگر a عددی گویا و غیر صفر باشد و b عددی گنگ، اعداد $a \pm b$ و ab و $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$ گنگ هستند.

همان طور که می‌دانید در مجموعه اعداد گویا را با هم جمع یا تفریق و یا در هم ضـرب کنـیم حاصـل عـددی اسـت گویـا (خاصیت بسته بودن مجموعه اعداد گویا، نسبت به عمل جمع و ضرب و تفریق) و امّا مجموعـه‌ی اعـداد گنـگ نسـبت بـه هیچیک از اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم بسته نیست زیرا:

$\sqrt{۲}$ عددی گنگ است و بنابر قضیه ۱، اعداد $۳-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}+۳, ۳-\sqrt{۲}, \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$ گنگ هستند ولی

$(۳+\sqrt{۲}) + (۳-\sqrt{۲}) = ۶ \in Q$

$(۳+\sqrt{۲}) \times (۳-\sqrt{۲}) = ۷ \in Q$

$\sqrt{۱۸} / \sqrt{۲} = ۳ \in Q$

۱-۵ تقریب اعداد گنگ

می‌دانیم که بسط اعشاری هر عدد گنگ به صورت کسری اعشاری با ارقام نامتناهی و بی پایان است کـه در آن ایـن ارقـام طبق هیچ ضابطه و نظم معینی رخ می‌دهند. به لحاظ تاریخی $\sqrt{۲}$ و π (عدد ارشـمیدس) مشـهورترین اعـداد گنـگ‌انـد. $\sqrt{۲}$ در رابطه با محاسبه طول قطر یک مربع به ضلع واحد پایدار گشت و π توسط ارشمیدس به عنوان ثابت دایره کشف گردید. همه دوایر موجود در عالم، چه کوچک و چه بزرگ، درگیر عدد π هستند، بدین معنی که نسبت محیط هر دایره بـر طول قطر آن عددی است که به π نشان داده می‌شود، قرار دادن حرف π برای چنین عددی خود مبین این واقعیت اسـت که این عدد گویا نیست. در طول تاریخ ریاضی محاسبه جزءِ اعشاری π یعنی شناخت ارقام اعشاری آن یکی از جذاب‌ترین فعالیّت‌های ریاضی به شمار رفته است. علت این امر را می‌توانیم در چند جهت مطرح کنیم.

استفاده از π در محاسبه مساحت و محیط دایره

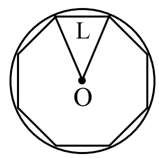
اینکه π گنگ بوده و نه تنها گنگ بلکه متعالی است.

داشتن تقریبات بهتر π برای استفاده در محاسبات دقیق‌تر نجومی به هر حال ارقام اعشاری π بی هیچ نظمی ادامـه دارد و بشر طالب آن است که تا آنجا که برایش مقدور است این ارقام را شناسایی کند. در ریاضیات عالی، بـه صـورتی تئوریـک، ثابت می‌شود که گنگ π گنگ است. محاسبات ارقام اعشاری π طی چندین قرن گذشته مؤید این نتیجه‌ی مهم اسـت و لذا می‌توان ادّعا کرد که قدرت تئوری پردازی ریاضی مبنی بر پیش‌بینی پدیده‌های ریاضی بـا تجربیـات پیچیـده محاسـباتی سازگاری تام و تمام دارد و این که یکی از زیبایی‌های علوم ریاضی است. ذیلاً به اختصار محاسبه و تولید ارقام اعشـاری π را به لحاظ تاریخی جهت آشنایی مرور می‌کنیم:

ارشمیدس، که در قرن سوم قبل از میلاد می‌زیسته، نشان داد که

$$\frac{۲۲۳}{۷} < \pi < \frac{۲۲}{۷}$$

وی این امر را با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم ثابت کرد که درون دایره به شعاع واحد محاط می‌شدند.
سپس پتولمی در قرن سوم بعد از میلاد، با استفاده از ۳۶۰ ضلعی منتظم مقدار ۳/۱۴۱۶۶۶ را برای π به دست آورد که تا سه رقم اعشار صحیح می‌باشد.
در سال ۲۶۳ بعد از میلاد لیوهوی با استفاده از یک ۹۶ ضلعی، منتظم و یک ۱۹۲ ضلعی و محاسبه میانگین مقادیر به دست آمده عدد ۳/۱۴۱۸۶۴ را برای به دست آورد که خطای این تقریب کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد.
غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان مسلمان ایرانی، بـه جـای محاسـبه π ۲ پرداختـه اسـت. روش کاشـانی درج چنـد ضلعی‌های منتظم و محاسبه تقریبی محیط آنها و سپس استخراج نسبت به شعاع دایره مربوطه بوده است. برای مثال هرگاه



یک هشت ضلعی منتظم را درون دایره به شعاع، مخاط می‌کنیم و طول ضلع این هشت را L بنامیم نسبت مربوطه برابر $\frac{۸L}{r} = ۲\pi$ خواهد بود.
کاشانی ارقام ۲π را تا ۱۶ رقم دقیقاً محاسبه کرده است و این محاسبه بسیار بسیار دقیق‌تـر از محاسـبه‌ی ارقـام π بـوده است که قبل از وی بدست آمده است.
دقت محاسبات کاشانی به گونه‌ای است که تا ۲۰۰ سال بعد از او توسط هیچ کسی پیش نگرفته بود و فقط لودوف توانسـت ۲۰۰ سال بعد از او عدد π را تا ۲۰۰ رقم اعشار محاسبه کند.
ماکزیمم خطای کاشانی در محاسبه π کمتر از $\frac{۱}{۶۰^{۹}}$ است. به عبارت دیگر

$۱۰ < ۹/۹۲ \times ۱۰^{-۱۷} <$ حداکثر خطای محاسبه ۲π

و این بدان معنی است که کاشانی عدد ۲π را تا ۱۶ رقم اعشار بعد از ممیز دقیقاً به دسـت آورده اسـت کـه بـا محاسـبات رایانه‌ای امروزی تطابق دارد!
در دوره‌ی بعد، که با پیشرفت حسابان پیشرفته (آنالیز ریاضی) اتفاق افتاد محاسبه ارقام اعشاری π با استفاده از فرمول‌های آنالیزی میسر گردید.
لئونارد اویلر، فرمول $\pi = ۲۰\arctan\frac{۱}{۷} + ۸\arctan\frac{۳}{۷۹}$ را بدست آورد.

۱- ptolemy ۲- liuhui

اسحاق نیوتن فرمول زیر را برای محاسبه π کشف کرد.

$$\frac{\pi}{۲} = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{k!}{(k+۱)!}$$

رامونوجان هندی فرمول $\frac{۱}{\pi} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۹۸۰۱} \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{(۴k)!(۱۱۰۳+۲۶۳۹۰k)}{(k!)^۴ ۳۹۶^{۴k}}$ را به دست آورد.

روش‌های محاسبه π با استفاده از رایانه از سال ۱۹۶۱ شروع گردید. این روش‌ها مؤثرترین و کارآمدترین روش‌های محاسبه π را با استفاده از تئوری‌های ریاضی و حساب‌گرهای فوق مدرن عرضه می‌کنند.

در اولین پروژه تحقیقاتی تحت نام پروژه گوتنبرگ اعشار π را تا یک میلیون رقم محاسبه کردند. سپس یاساما کانادا از دانشگاه توکیو توانست تعداد ۱,۲۴۱,۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ رقم اعشار از π را به دقت به دست آورد. این محاسبه در سال ۲۰۰۲ توسط یک سوپر رایانه هیتاچی، که ۲ تریلیون عمل را در هر ثانیه انجام می‌داد، صورت پذیرفت.

در دسامبر ۲۰۰۹ یک سوپر کامپیوتر ژاپنی به نام T۲kopen Supercomputer ادّعا کرده است که عدد π را تا ۲۶۰۰ میلیارد رقم اعشار طی ۷۳ ساعت و ۳۶ دقیقه به دست آورده است. باز هم در این ارقام هیچگونه نظم و قاعده‌ای حاکم نیست.

این نکته را باید متذکر شویم که تا هر تعداد از ارقام π که محاسبه شود و بقیه ارقام را نادیده بگیریم در واقع با تقریبی از π به شکل یک عدد گویا دست یافته‌ایم. البته با مقدار واقعی π به شکل همه ارقام اعشاری آن هرگز کار نخواهیم کرد که این امری غیرممکن است. این رویه برای کار عملی با سایر اعداد گنگ نیز مرسوم است. در واقع با تقریبات اعداد گنگ در عمل کار خواهد شد.

کاشانی معتقد بود که مقدار واقعی عدد π را فقط خدا می‌داند. در واقع کاشانی با شهودی الهام گونه دریافته بود که عددی گنگ است، امّا اثبات گنگ بودن π قرن‌ها بعد انجام گرفت.

عکس از کاشانی

غیاث‌الدین جمشید کاشانی، ریاضیدان و منجم ایرانی

۱-۶ ترتیب و نامساوی‌ها

یکی از خواص مهم اعداد حقیقی مرتب بودن آنها است.

تعریف ترتیب خط حقیقی ـ هرگاه b, a اعداد حقیقی باشند، آنگاه a کوچکتر از b است. اگر $b-a$ مثبت باشد. این ترتیب را با نامساوی $a < b$ (معادلات $b > a$) نشان می‌دهیم. علامت $a \le b$ یعنی a کوچکتر یا مساوی b است.

$$\xrightarrow[a<b]{a \qquad b} x$$

عبارت b بزرگتر از a است. هم ارز a کوچکتر از b است.

خواص زیر اغلب در نامساوی‌ها به کار می‌روند. اگر $>$ را با $\le$ و $<$ را با $\ge$ عوض کنیم، خواص مشابهی به دست می‌آید.

۱- ludolph vancullen

خواص نامساوی‌ها

۱. هرگاه $a<b$ ، $b<c$ آنگاه $a+c$.
۲. هرگاه $a<b$ ، $c<d$ آنگاه $a+c<b+d$.
۳. هرگاه $a<b$ و c عددی حقیقی باشد، آنگاه $a+c<b+c$.
۴. هرگاه $a<b$ $c>۰$، آنگاه $a.c<bc$.
۵. هرگاه $a<b$ $c<۰$ ، آنگاه $ac>bc$
۶. (اگر b,a مثبت باشند) $\frac{۱}{a}>\frac{۱}{b} \Leftrightarrow a<b$. ($\Leftrightarrow$ به معنی هم‌ارزی است)
۷. (اگر b,a مثبت باشند) $a<b \Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$

۱- yasumusu kanada

تبصره: توجه کنید که نامساوی‌ها با ضرب در عددی منفی تغییر جهت می‌دهند.
مثلاً هرگاه $x<۵$ ، آنگاه $-۳x>-۱۵$ این ویژگی در تقسیم بر عددی منفی نیز صادق است. مثلاً، هر گاه $-۳x>۹$ آنگاه $x<-۳$.
اگر سه عدد حقیقی c,b,a چنان باشند که $a<b$ و $b<c$ ، می‌گوییم b بین a و c است و می‌نویسیم $a<b<c$.

۱-۶ بازه‌های اعداد

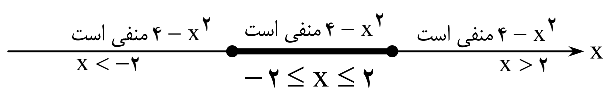
در حساب دیفرانسیل و انتگرال اغلب تعیین مثبت، صفر یا منفی بودن عبارات اهمّیت دارد. مثلاً برای معادله $y=\sqrt{۴-x^{۲}}$ که متغیر y را بر حسب متغیر x بیان می‌کند، چون جذر یک عدد منفی در R بی‌معنی است، باید برای حقیقی بودن y شرط

$۴-x^{۲}\geq ۰$ ($۴-x^{۲}$ نامنفی است)

اعمال می‌شود. این شرط معادل عبارت زیر است.

$-۲\leq x\leq ۲$ (x بین -۲ و ۲ است)

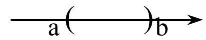
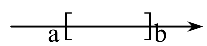
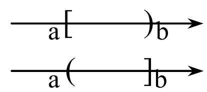
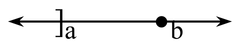
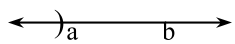
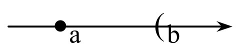
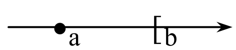
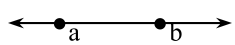
در نتیجه، مجموعه‌ی اعداد نموده شده با x بازه‌ای است با نقاط انتهایی ± ۲ بر خط حقیقی (شکل ۳)



شکل ۳

نظیر شکل (۳) اغلب زیر مجموعه‌های خط حقیقی یعنی مجموعه‌های اعدادی که یک متغییر را نمایش می‌دهند بازه یا اجتماعی از بازه‌ها می‌باشند.
بازه‌ها از چند نوع‌اند، که هر یک نماد خاص خود را دارند.
مثلاً بازه‌ی باز $(a,b)=\{x:a<x<b\}$ مجموعه‌ای تمام اعداد حقیقی بزرگتر از a و کوچکتر از b است، که در آن b,a نقاط انتهایی بازه نام دارند و این نقاط انتهایی در بازه‌ی باز قرارندارند.

بازه‌هایی که شامل نقاط انتهایی خود باشند بازه بسته نام داشته و با نِماد $[a,b] = \{x : a \le x \le b\}$ نموده می‌شوند. در جدول (۱) نه بازه‌ی اصلی روی خط حقیقی نموده شده‌اند. که چهارتای اولی را بازه‌های کران‌دار و پنج تای دیگر را بازه‌های بی‌کران می‌نامند.

نام	نماد بازه	نماد مجموعه	نمودار روی خط
بازه‌ی باز	(a,b)	$\{x : a < x < b\}$	
بازه‌ی بسته	$[a,b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	
بازه‌های نیم‌باز	$[a,b)$ $(a,b]$	$\{x : a \le x < b\}$ $\{x : a < x \le b\}$	
بازه‌های نامتناهی	$(-\infty,a]$	$\{x : x \le a\}$	
	$(-\infty,a)$	$\{x : x < a\}$	
	$(b,+\infty)$	$\{x : b < x\}$	
	$[b,+\infty)$	$\{x : b \le x\}$	
R	$(-\infty,+\infty)$	{x : عددی حقیقی است x}	

جدول (۱)

تبصره: علائم $+\infty$ و $-\infty$ نمایش اعدادی حقیقی نبوده و فقط با آنها می‌توان شریط بی‌کران را خلاصه‌تر بیان کرد. مثلاً بازه $[b,+\infty)$ از راست بی‌کران است. زیرا شامل همه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی b است.

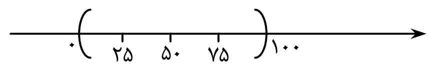
مثال ـ با فرض اینکه فشار هوا یک اتمسفر است بازه‌هایی از خط حقیقی را توصیف کنید که نظیر بُرد دمای (به درجهِ سلسیوس) آب در دو حالت زیر باشند.

(آ) مایع (ب) بخار

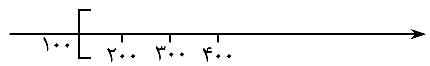
حل ـ

(آ). چون آب در شرایط مایع دمایی بیش از ۰° و کمتر از ۱۰۰° دارد بازه‌ی $\{x : ۰ < x < ۱۰۰\} = (۰,۱۰۰)$ را مثل شکل ۴ (آ) خواهیم داشت.

(ب) چون آب در شرایط گاز (بخار) دمایی بزرگتر یا مساوی ۱۰۰° دارد بازه $[\{x : ۱۰۰ \le x\} = (۱۰۰,+\infty)]$ را مثل شکل (۴) (ب) خواهیم داشت.

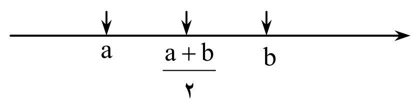


(آ) بُرد دمای آب شکل (۴)



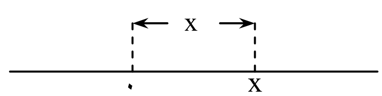
(ب) بُرد دمای بخار

بازه متقارن. فرض کنیم (a,b) یک بازه باشد. معلوم است که عدد $\frac{a+b}{۲}$ به این بازه تعلّق دارد(چرا؟) این نقطه را نقطه میانی بازه می‌نامیم زیرا فاصله آن تا نقاط انتهایی b,a یکسان است.(شکل*)



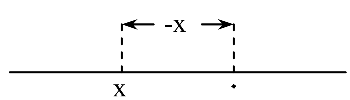
هرگاه $\delta > ۰$ ، بازه $(x_{\circ} - \delta, x_{\circ} + \delta)$ بازه‌ای با نقطه‌ی میانی $x_{\circ}$ و شعاع δ است. چنین بازه‌هایی را بازه‌ی متقارن می‌نامیم.

اغلب دانستن این نقطه‌ی x از خط مختصات چه‌قدر تا مبداء فاصله دارد مهم است. همانطور که شکل (۵) نشان داده، اوّلین حدس ممکن است x باشد.



شکل (۵) فاصله‌ی x تا ۰ وقتی $x > ۰$

امّا اگر $x < ۰$ فاصله برابر x نیست بلکه $-x$ است (شکل۶) مثلاً اگر $x = -۵$ و $-x = -(-۵) = ۵$ می‌باشد.



شکل (۶) فاصله‌ی x تا ۰ وقتی $x < ۰$

برای بیان مقدار $\sqrt{x^2}$ می‌توان برحسب حالات چنین نوشت :

$$\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$$

علامت دیگر استفاده از $|x|$ است، که در تعریف زیر دقیقاً عرضه شده است.

۱-۷ قدر مطلق

هرگاه $x \in R$ ، قدر مطلق x عبارت است از

$$|x|=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

مثال– با استفاده از دو قسمت تعریف، قدر مطلق -5 را بیابید.

حل:
$$|-5|=\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5$$

قضایای زیر چند خاصیت مفید قدر مطلق را بیان می‌دارند.

قضیه‌ی ۱(اعمال با قدر مطلق)

هرگاه b,a اعداد حقیقی بوده و n عدد صحیح مثبتی باشد، آنگاه خواص زیر برقرار می‌باشند.

۱. $|a.b|=|a||b|$

۲. $\left|\frac{a}{b}\right|=\left|\frac{a}{b}\right|, b \neq 0$

۳. $\left|a^n\right|=|a|^{\eta}$

اثبات به عهده‌ی دانش‌آموز

قضیه (نامساوی‌ها و قدر مطلق)

هرگاه a,b اعدادای حقیقی بوده و k مثبت باشد، خواص زیر برقرار می‌باشند

۱. $-|a| \leq a \leq |a|$

۲. $|a| \leq k$ اگر و فقط اگر $-k \leq a \leq k$.

۳. $|a| \geq k$ اگر و فقط اگر $a \geq k$ یا $a \leq -k$.

۴. نامساوی مثلثی: $|a+b| \leq |a|+|b|$

خواص ۲ و ۳ در صورت تعویض $\leq$ با $<$ نیز درست‌اند. این احکام را بر حسب $<$ بنویسید.

برهان ـ خاصیت‌های ۲ و ۴ را اثبات دو خاصیت دیگر را به عنوان تمرین می‌گذاریم.

اثبات ۲) فرض کنید $|a| \le k$ ، چون $-|a| \le a \le |a|$ نتیجه می‌شود

$$-k \le -|a| \le a \le |a| \le k$$

یعنی $-k \le a \le k$

حال فرض کنید $-k \le a \le k$ ، اگر $a \ge ۰$ ، $|a| = a \le a$ و اگر $a \le ۰$ ، $|a| = -a \le a$

از این رو در هر حالت $|a| \le k$

اثبات ۴) چون $-|b| \le b \le |b|, -|a| \le a \le |a|$

بنابراین $-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$

و بنابر قضیه $|a + b| \le |a| + |b|$

مثال ــ نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی y, x

$$|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$$

حل ــ طبق نامساوی مثلثی

$$|a| = |a - b + b| \le |a - b| + |b|$$

پس

$$|a| - |b| \le |a - b| \qquad (۱)$$

از طرف دیگر طبق نامساوی مثلثی

$$|a - b| \le |a + (-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b| \qquad (۲)$$

و از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود

$$|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$$

تمرین:

فعالیت کلاسی ــ نامساوی مثلثی را برای سه عدد $a_۱$ ، $a_۲$ و $a_۳$ بیان و اثبات کنید.

آیا صورت کلی‌تری (برای n عدد) از این نامساوی می‌توانید بیان کنید؟

مسائل

۱- نامعادله $-\frac{۲}{x} < \frac{۵}{x - ۱}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

۲- جواب نامعادله‌ای زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

الف) $۳x + ۵ \le ۸$ ب) $۵x - ۳ \le ۷ - ۳x$

ج) $x^۲ < ۹$ د) $\frac{۱}{۲ - x} < ۳$

۳- هر یک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $|x - ۱| \le ۲$ ب) $|۲x + ۵| < ۱$

ج) $|۲ - \frac{x}{۲}| < \frac{۱}{۲}$ د) $|۳x - ۷| < ۲$

هـ) $|۲x + ۵| < ۱$

۴- جواب‌هایی از نابرابری $|x^{۲}-۴|<\varepsilon$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(۲-\frac{۱}{۱۰},۲+\frac{۱}{۱۰})$ قرار داشته باشند. (ε عدد مثبت ثابتی است.)

۵- جواب‌هایی از نابرابری $|x^{۲}-۹|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(۲,۴)$ قرار داشته باشند.

۶- جواب‌هایی از نابرابری $|x^{۲}-۹|\rangle\varepsilon$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(۳-\delta_{۱},۳+\delta_{۱})$ قرار داشته باشند (ε و δ دو عدد ثابت کوچک‌اند!).

۷- جواب‌هایی از نابرابری $\frac{۱}{x^{۲}}<\frac{۱}{۱۰^{۴}}$ را به دست آورید که در بازه $(۳,\infty)$ قرار دارند.

۸- جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^{۲}-۴}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(۲-\delta_{۱},۲+\delta_{۱})$ قرار دارند. ($\delta_{۱}$ عدد مثبت دلخواهی است.)

۹- فرض کنیم $z<x<b$، ثابت کنید:

$$|x|<\max\{|a|,|b|\}$$

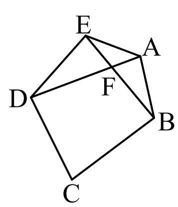
(منظور از max، ماکسیمم مقدار مجموعه است.)

آیا عکس این حکم درست است؟

۱۰- فرض کنیم برای هر عدد مثبت h، $۰\le a<h$ ثابت کنید $a=۰$.

۱۱- ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a، طول قطر عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی ـ ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



۱۲- ثابت کنید $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است.

۱۳- ثابت کنید $\log ۳$ گویا نیست.

۱۴- اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی محور اعداد نشان دهید.

فصل ۱- دنباله‌ها

۲-۱. مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند.

آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست محیطی و تغییرات آن رشد و زوال‌گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+۱}=\frac{bp_n}{a+p_n}$$

پیروی کند که در آن p_n جمعیت ماهی‌ها در سال nام، $p_{n+۱}$ جمعیت ماهی‌ها در سال $n+۱$ام و a و b دو عدد ثابت‌اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند.

با استفاده از این رابطه چنان‌چه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی، معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\ldots, p_n \ldots\ldots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آن‌ها موضوع این فصل می‌باشد.

مسأله ـ (الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد. (ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود.

در ادامه این فصل با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آن‌ها به این پرسش‌ها پاسخ خواهیم داد.

با استفاده از رابطه داده شده چنان‌چه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی $p_۱$، معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم، یعنی p_Z به دست می‌آید:

$$P_Z=\frac{bp_۱}{a+p_۱} \qquad (n=۱)$$

مشابهاً با داشتن P_Z، و قرار دادن $P=۲$ در فرمول، $P_۲$ به دست می‌آید. با ادامه این فرآیند، اعداد

$$p_۱, p_۲, p_۳, \ldots\ldots, p_n, \ldots\ldots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را یک دنباله می‌نامیم، مطالعه دنباله‌ها و خواص آن‌ها موضوع این فصل می‌باشد.

۲-۲. دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسرهای گویا به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن‌که کسر $\frac{۱}{۳}$ را به کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم. در ابتدا عدد ۰/۳ حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد ۰/۳۳ ، ۰/۳۳۳ و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقی‌مانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار هم‌چنان ادامه درند.

آیا $\frac{۱}{۳}$ با اعداد به دست آمده برابر است؟

هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳ اختیار کنیم، مقداری تقریبی برای $\frac{۱}{۳}$ به دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کم‌تر از ۰/۱ است؛

زیرا

$$\frac{۱}{۳} - ۰/۳ = ۰/۰۳۳....$$

و $۰/۰۳۳ \prec ۰/۱$ هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳ اختیار کنیم، خطای تقریب از ۰/۰۱ نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳۳ بگیریم، خطای تقریب از ۰/۰۰۱ کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب $\frac{۱}{۳}$ را به صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می‌کنند.

مسأله ـ ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن‌که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۳....$$

امّا نوشتن کسر اعشاری با نمایش ۰/۳۳۳۳، که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آن‌که ۳ صدم و ۳ هزارم و . . . را تکرار نکنند می‌نویسند

$$\frac{۱}{۳} = ۰/\overline{۳}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «. . .» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می‌توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟

در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به صورت

$$۰/۳, ۰/۳۳, ۰/۳۳۳, ..., \underbrace{۰/۳۳۳....۳}_{n \text{ بار}}, ...$$

$$\alpha_۱ \quad \alpha_۲ \quad \alpha_۳, ... \alpha_n, ...$$

در دست داریم که در آن $\alpha_۱ = ۰/۳$ ، $\alpha_۲ = ۰/۳۳$ ، . . . و $\alpha_۳ = ۰/۳۳...۳$ ، n بار.

$\alpha_۱$ را جمله اول این دنباله، $a_۲$ را جمله دوم و در حالت کلی، α_n را جمله n ام این دنباله یا جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

فعالیت: اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می‌کنید؟

احمد: یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند.

دبیر: بسیار خوب. آیا می‌توانی به زبان دقیق‌تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد: آری. هر دنباله عددی، یا به اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی N و همه از مجموعه اعداد حقیقی R.

دبیر: بسیار خوب. شمار تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می‌توان به علامات ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

احمد: فرض کنیم

$$\alpha : N \to R \qquad (۱)$$

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد. در این صورت $\alpha(۱),\alpha(۲),....,\alpha(n)$ مقادیر تابع α بوده که اعدادی حقیقی‌اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای $\alpha(۱)$ می‌نویسیم $\alpha_۱$، به جای $\alpha(۲)$ می‌نویسیم $\alpha_۲$ و به طور کلی به جای $\alpha(n)$ می‌نویسیم a_n. لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$a_۱,a_۲,....,a_n,...$$

دبیر: اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین: این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم:

$$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},.....,\frac{۱}{n},..... \qquad (۱)$$

$$\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۵}{۶},......,\frac{n}{n+۱},...... \qquad (۲)$$

دبیر: اکنون این دنباله را در نظر بگیرید:

$$۷,-۸,۹,\frac{۵}{۶},\frac{۷}{۸},\frac{۸}{۹},..... \qquad (۳)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟

حسین: آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین ۸– دومین و ۹ سومین و $\frac{۵}{۶}$ چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را b بنامیم، داریم:

$$b_۱=۷\ ,\ b_۲=-۸\ ,\ \ b_۳=۹\ ,\ \ b_۴=\frac{۵}{۶}\ ,\ \ b_۵,\frac{۶}{۷},.....$$

امّا از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع‌اند، منظم هستند، پس می‌نویسیم:

$$b_۱=۷\ ,\ b_۲=-۸\ ,\ \ b_۳=۹\ ,\ \ b_n=\frac{n}{n+۱}\ ,\ \ n\geq ۴$$

دبیر: فرق این دنباله با دنباله نموده شده در (۲) چیست؟

حسین: دنباله‌های (۳) و (۲) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر: آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟

حسین: خیر؛ امّا تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.

دبیر: از دنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هست؟ تصاعد هندسی را به خاطر دارید؟

احمد: آری. می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک تصاعد هندسی می‌سازم:

$$۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۴}\ ,\ \frac{۱}{۸}\ ,\ \frac{۱}{۶}\ ,\ ....\ ,\ \frac{۱}{۲^{n-۱}}\ ,\ ....$$

دبیر: درست است. این دنباله یک دنباله تصاعد هندسی است که قدر نسبت آن $q=\frac{۱}{۲}$ است. جملات آن مرتب کوچک و کوچک‌تر می‌شوند زیرا قدرنسبت آن کوچک‌تر از واحد است.

حسین: منظورتان از کوچک‌تر شدن چیست؟

دبیر: منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسینی: اما هر کسر به شکل $\frac{۱}{۲^{n-۱}}$، ولو n خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر نمی‌شود.

دبیر: آری درست است. منظور از آن‌که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آن‌ها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد. اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

نِماد دنباله. وقتی با یک دنباله مانند

$$\alpha_۱ , \alpha_۲ , \ldots, \alpha_۳ , \ldots, \alpha_n , \ldots..$$

سر و کار داریم، آن را با نِماد آکولاد یعنی $\{\alpha_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و یا مختصراً $\{\alpha_n\}_{n=۱}$ و یا حتی مختصرتر با $\{\alpha_n\}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با $\{\frac{۱}{n}\}_{n=۱}$ و $\{\frac{n}{n+۱}\}_{n=۱}$ نشان می‌دهیم؛ لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرار می‌دهیم و $n=۱$ نشان‌گر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد. یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند $\alpha_n = \frac{۱}{n}$ بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آن‌که جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم.

از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد π است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد π گرایش دارند).

$$۳, ۳/۱۴, ۳/۱۴۲۸, \ldots.$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

نکته: ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سروکار داشته باشیم، در این صورت این توالی را یک دنباله متناهی می‌نامیم، مانند:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots.., ۲۰$$

$$-۵, ۵, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \sqrt{۲}, -\sqrt{۳}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با ۲۰ جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با ۶ جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است.

۲-۳. دنباله اشیاء

گرچه ما دنباله را به عنوان تابعی گذر که مقدارهایش را از مجموعه R می‌گیرد تعریف کردیم؛ و امّا ممکن است جملات آن را از هر مجموعه دلخواه بوده باشند. در واقع هر وقت یک مجموعه از اشیاءِ را با اعداد طبیعی شماره‌گذاری کنیم یک دنباله از آن اشیاءِ به دست آورده‌ایم. در تمرین‌های بعدی با نمونه‌های متنوعی از دنباله‌ها کار خواهید کرد. در این‌جا به ذکر مثال جالبی از دنباله‌های می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

مثال. فرض کنیم $C \in R$ عدد ثابتی باشد. دنباله

$$C, C, C, C, \ldots., C, \ldots.$$

که در آن همه جملات برابر C هستند، یعنی برای هر عدد طبیعی n، $C_n = C$، دنباله ثابت C نامیده می‌شود. برای نمونه دنباله

$$\sqrt{۲}\ ,\ \sqrt{۲}\ ,\ \dots\ ,\ \sqrt{۲}\ ,\ \dots.$$

دنباله ثابت $\sqrt{۲}$ یعنی $\{\sqrt{۲}\}$ می‌باشد.

تمرین در کلاس

۱- دنباله $\{A_n\}_{n=۱}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$A_n = (۱-\frac{۱}{n}\ ,\ ۱+\frac{۱}{n})$$

$A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، $A_۴$ و $A_۵$ را پیدا کنید. ملاحظه می‌کنید که هر A_n، بازه‌ای به مرکز ۱ و شعاع $\frac{۱}{n}$ می‌باشد. بدین ترتیب دنباله‌ای از بازه‌های (تو در تو) به دست آورده‌اید.

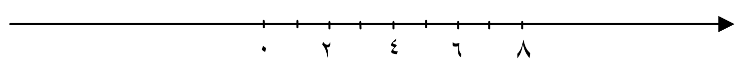
۲- تابع $f_n : R \to R$ را با ضابطه $f_n(x) = x^n + ۱$ که در آن $n \in N$ عدد ثابتی است تعریف می‌کنیم. با دادن مقادیر طبیعی به n، $f_۱(x)$، $f_۲(x)$، $f_۳(x)$ تا $f_۷(x)$ را مشخص کنید. بنابراین دنباله‌ای از توابع یعنی

$$f_۱\ ,\ f_۲\ ,\ f_۳\ ,\ \dots.\ ,\ f_n\ ,\ \dots.$$

را به دست آورده‌اید.

نمودار دنباله‌ها

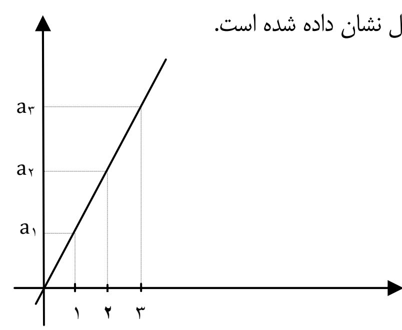
یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص کردن جملات دنباله روی خط حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد طبیعی زوج، یعنی $\{۲n\}_{n=۱}$ به صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود.



شکل ۲-۱

شکل ۲-۱. جملات دنباله $\alpha_n = ۲n$ یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپر روی محور اعداد مشخص شده‌اند.

راه دوم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است. همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله $\alpha_n = ۲n$ در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲- ۲

شکل ۲-۲ وقتی با خط به معادله $f(x)=۲x$ مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم کـه نمـودار دنبالـه $\alpha_n=۲n$ بـه صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

۲-۴. انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، تابع نزولی، تـابع کرانـدار در حسـابان از اهمیـت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم A زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد. تابع f را بر A صعودی می‌نامیم، در صـورتی کـه همـواره از $x_۱<x_۲$ نتیجه می‌شود $f(x_۱)<f(x_۲)$. همچنین تابع f را بر A از بالا کراندار نامیم در صورتی که عدد حقیقـی U یافت شود به طوری که برای هر $x\in A$، $f(x)\le U$.

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند.

تابع f را بر A کراندار می‌نامیم در صورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد.

یعنی عددی مثبت مانند U یافت شود به طوری که برای هر x

$$-U<f(x)<U\ \ ,\ \ x\in A$$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است؟ همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید.

در این‌جا کار ساده‌تر می‌نماید زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به طور مرتب شده، از کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود:

$$\downarrow\ \begin{matrix} ۱<۲<۳<۴.....\langle n<n+۱ \\ \alpha_۱\ \alpha_۲\ \alpha_۳\ \alpha_۴\ \ \alpha_n\ \ \alpha_{n+۱}\end{matrix}$$

پس هرگاه $\{\alpha_n\}$ بخواهد صعودی باشد، چون $۱<۲$ باید $\alpha_۱<\alpha_۲$. همچنـین چـون $۲<۳$ بایـد داشـته باشـیم $\alpha_۲<\alpha_۳$ و به طور کلی چون $n<n+۱$ لازم است که $a_n<a_{n+۱}$ یعنی هر گاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، جمله باید از جمله بعدی کوچک تر باشد.برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله ای نزولی است کـه اگـر از چپ به آن بنگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر باشد، به عبارت دیگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هر گـاه بـرای هـر n، $a_n<a_{n+۱}$ و دنباله $\{a_n\}$ نزولی است ، هر گاه برای هر n، $a_{n+۱}<a_n$.

هر دنباله صعودی یا نزولی باشد یک دنباله یکنوا نامیده می‌شود.

تمرین در کلاس ـ به دنباله‌های زیر توجه کنید.

(الف)

$$۱\ ,\ ۲\ ,\ ۴\ ,\ ۸\ ,\ ۱۶\ ,\ ۳۲\ ,\ ۶۴\ ,\ ....\ ,\ n^۲\ ,\ ...$$

(ب)

$$\frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۶}\ ,\ \frac{۱}{۳۲}\ ,\ \frac{۱}{۸۱}\ ,\ \frac{۱}{۲۴۳}\ ,\ ...\ ,\ \frac{۱}{۳^n}\ ,\ .....$$

(ج)

$$۲\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ \frac{۴}{۳}\ ,\ \frac{۵}{۴}\ ,\ \frac{۶}{۵}\ ,\ \frac{۷}{۶}\ ,\ ......\ ,\ \frac{n+۱}{b}\ ,\ ......$$

(د)

$$۲\ ,\ (\frac{۳}{۲})^۲\ ,\ (\frac{۴}{۳})^۳\ ,\ (\frac{۵}{۴})^۴\ ,\ (\frac{۶}{۵})^۵\ ,\ ....\ ,\ (\frac{n+۱}{n})^n\ ,\ ......$$

$$\frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۳}{۴}\ ,\ .....\ ,\ \frac{n}{n+۱}\ ,\ ....$$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدام‌یک نزولی است.

نکته: در مبحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله به عنوان رفتار دنباله یاد می‌شود. برای مثال وقتی دنباله‌ای صعودی است. رفتار دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد؛ یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگ‌تر نخواهد شد. بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آن‌هاست.

دنباله‌نوسانی

به دنباله‌های زیر توجه کنید:

(الف)

$$1,-1,1,-1,1,-1,\dots,(-1)^{n+1},\dots$$

(ب) $-\frac{1}{2},+\frac{1}{4},-\frac{1}{8},+\frac{1}{16},\dots,(-\frac{1}{2})^n,\dots$

(ج) $2,-3,4,-5,6,-7,\dots$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک در میان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و ۱- گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا ۱- هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند؛ در حالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ یک از این سه دنباله نه صعودی‌اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

مسائل

۱- چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید:

الف) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$　　ب) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

ج) $\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$　　د) $\{(1+(-\frac{1}{2})^n\}_{n=1}^{\infty}$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید، این که چه تعداد از جمله‌های نخست را انتخاب می‌کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدام‌یک صعودی و کدام‌یک نزولی‌اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲- یک دنباله بسازید که کراندار باشد اما صعودی نباشد.

۳- یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴- نشان دهید که هیچ کدام از دو جمله دنباله $\{\frac{1}{n}\}$ برابر نیستند.

۵- ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۶- دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۷- با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آن‌ها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\{1+(\frac{1}{2})^n\}$　　ب) $\{\frac{n^2}{2n}\}$　　ج) $\{1+(-1)^n\}$

د) $\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}$　　هـ) $\{\cos(\frac{n\pi}{2n})\}$　　ز) $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$

۸- دنباله $a_n = \frac{n}{n+1}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},.......,\frac{n}{n+1},.....$$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال:

$$b_1 = 1\ ,\ b_2 = 5\ ,\ b_3 = 10\ ,\ b_4 = 10\ ,\ b_5 = -15$$

و برای $n \geq 6$، قرار می‌دهیم $b_n = a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹- دنباله

$$C_n : 1,1,2,3,5,8,13,21,34,......$$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید. دنباله $\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله فیبوناتچی[1] معروف‌اند.

۱۰- ثابت کنید هرگاه دنباله $\{\alpha_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که برای هر n، $|\alpha_n| \leq M$ و بالعکس.

۱۱- برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\{\frac{2n}{n+1}\}$ را تا ۲ حساب کنید. فاصله جمله nام را نیز تا ۲ محاسبه کنید. n از چه عددی باید بزرگ‌تر باشد تا نابرابری $|\frac{2n}{n+1} - 2| < 0/0001$ برقرار باشد.

۱۲- یک دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار باشد. دو دنباله نوسانی تعریف کنید که کراندار نباشند.

پرسش‌های مفهومی

۱- پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آن‌ها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارایه دهید.

الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

ب) هرگاه $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای صعودی و c عدد ثابتی باشد دنباله $\{c\alpha_n\}$ نیز صعودی است.

ج) هرگاه $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای نزولی و c عدد ثابتی باشد دنباله $\{c\alpha_n\}$ نیز نزولی است.

د) هرگاه $\{\alpha_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و عدد c عدد ثابتی باشد دنباله $\{c\alpha_n\}$ نیز یکنواست.

۲-۵. همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این‌حال، در بیش‌تر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آن‌ها را ملاحظه

---

۱. لئونادو فیبوناتچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آن‌ها این‌گونه دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت‌بندی کرده است.

کرد، در واقع، دیدن و یافتن آن‌ها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد! در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آن‌ها وجود داشته باشد؟

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم:

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کم‌تر خودنمایی می‌کند. برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گرایند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گرایند.

و دنباله‌هایی که جملات آن‌ها، به یک عدد معین نمی‌گرایند.

برای مثال از دنباله‌های دسته اول به دنباله‌های زیر توجه می‌کنیم:

دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$

دنباله $\left\{\frac{۱}{n+۱}\right\}$

دنباله $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$

دنباله $\left\{(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$

و به عنوان نمونه از دنباله‌های دسته دوم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شماره جمله دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند دنباله‌های زیر را نام می‌بریم:

دنباله اعداد زوج $\{۲n\}$

دنباله اعداد فرد $\{۲n-۱\}$

دنباله $\{(-۱)^{n+۱}\}$

در درس ریاضی ۱ سال گذشته ملاحظه کردیم که دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ به صفر میل می‌کنید؛ به عبارت دیگر جملات این دنباله، با افزایش شماره جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

همچنین با محاسبه جملات دنباله $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. برای آن‌که این مفهوم «نزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم؛ قبل از این جدولی برای یقینی مقادیر این دنباله

n	۱	۲۰	۴	۵	۶	۷	....
α_n	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱۷}{۱۶}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	$\frac{۶۵}{۶۴}$	$\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$	....

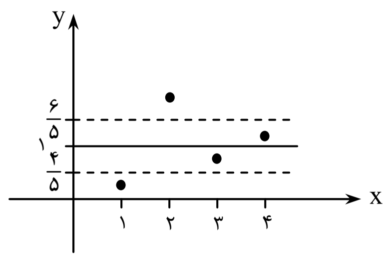
می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدرمطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود.

پس هرگاه بخواهیم $|\alpha_n - ۱| < \frac{۱}{۵}$ کافی است به جای a_n عبارت $۱ + (\frac{-۱}{۲})^n$ را قرار دهیم:

$$|\alpha_n - ۱| = |۱ + (-\frac{۱}{۲})^n - ۱| = (\frac{۱}{۲})^n$$

حال برای آن‌که $(\frac{۱}{۲})^n < \frac{۱}{۵}$ کافی است $۲^n \rangle ۵$ (۱) پس هرگاه مثلاً $۲^n > ۸ = ۲^۳$ به طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید $n \geq ۳$.

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شماره $n = ۳$ به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از $\frac{۱}{۵}$ کوچک‌تر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم:



شکل ۲-۳. نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز $y = ۱$ قرار دارند.

وقتی نواری به مرکز خط $y = ۱$ و به شعاع $\frac{۱}{۵}$ در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبه ۳ به بعد در این نوار قرار می‌گیریم؛ به زبان فنی‌تر هرگاه $n > ۳$، یعنی $\alpha_n \in (۱-\frac{۱}{۵}, ۱+\frac{۱}{۵})$، یعنی $\alpha_n \in (\frac{۴}{۵}, \frac{۶}{۵})$.

$$n = ۴\ ,\ |a_n - ۱| = |\frac{۱۷}{۱۶} - ۱| = \frac{۱}{۱۶} < \frac{۱}{۵}$$

$$n = ۵\ ,\ |a_n - ۱| = |\frac{۳۱}{۳۲} - ۱| = \frac{۱}{۳۲} < \frac{۱}{۵}$$

$$n = ۶\ ,\ |a_n - ۱| = |\frac{۶۵}{۶۴} - ۱| = \frac{۱}{۶۴} < \frac{۱}{۵}$$

فعالیت کلاسی

بار دیگر به دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ بر می‌گردیم. می‌دانیم که بزرگ و بزرگ‌تر شدن n جملات دنباله به عدد صفر می‌گرایند. اکنون از شما خواسته می‌شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن‌تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می‌کنیم:

هرگاه $\alpha_n = \frac{۱}{n}$، از چه شماره و یا مرتبه‌ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچک‌تر است؟

در واقع می‌خواهیم جواب‌های نامساوی $|\alpha_n - ۰| = \frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰۰}$ را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی $n > ۱۰۰$ می‌باشد، پس داریم:

$$n > ۱۰۰ \Rightarrow |a_n - ۰| < \frac{۱}{۱۰۰}$$

برای مثال:

$$n = ۱۰۱ \Rightarrow |a_n - ۰| = \frac{۱}{۱۰۱} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n = ۱۰۵ \Rightarrow |a_n - ۰| = \frac{۱}{۱۰۵} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n = ۱۰۰۰ \Rightarrow |a_n - ۰| = \frac{۱}{۱۰۰۰} < \frac{۱}{۱۰۰}$$

حال با اختیار کردن $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰}$، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سپس با اختیار کردن $\frac{۱}{۱۰۰۰/۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

همچنین با اختیار کردن $\frac{۱}{۱۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰}$ به جای $\frac{۱}{۱۰۰}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سؤال: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صدمیلیونم، و یک میلیاردم برقرار است؟

نکته ـ برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیش‌تر دنباله $a_n = \frac{۱}{n}$ می‌پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای nهای بزرگ در جدول زیر درج کرده‌ایم:

n	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	$۱۰^۶$	$۱۰^۸$	$۱۰^۹$	....
$\frac{۱}{n}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰}$	$\frac{۱}{۱۰۰۰}$	$\frac{۱}{۱۰^۶}$	$\frac{۱}{۱۰^۸}$	$\frac{۱}{۱۰^۹}$	....

این جدول برخی مقادیر دنباله $\frac{۱}{n}$ را نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می‌کنیم که هر اندازه n بزرگ‌تر اختیار شود مقدار $\frac{۱}{n}$ کوچک‌تر می‌شود و نقاط نمایش دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند.

از طرف دیگر می‌دانیم که همه مقادیر دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبداء، یعنی صفر، قرار دارند.

می‌توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کم‌تر نمی‌شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می‌کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی‌رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک

می‌شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می‌رسد که نقاط نمایش مقادیر $\frac{1}{n}$ برای nهای بزرگ در نزدیکی‌های نقطه صفر به هم می‌چسبند و گویی طولی پیوسته می‌سازند! در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه‌ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن‌که طولی پیوسته به وجود آید، مهم‌تر از این می‌دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویا بی‌شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این‌که فاصله دو نقطه روی محور با قدر مطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدرمطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می‌کند. بنابراین بجاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نماد و مفهوم قدرمطلق صورت‌بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می‌گرایند و یا حول آن تجمع می‌کنند «L» بنامیم، آن‌گاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم:

اختلاف جمله nام دنباله $\{\alpha_n\}$ با مقدار حدی، مساوی $|\alpha_n - L|$

فاصله جمله nام دنباله تا نقطه حدی دنباله، مساوی $|\alpha_n - L|$

در حالت خاص دنباله $\alpha_n = \frac{1}{n}$، عبارت قدرمطلقی مربوطه به صورت زیر است:

$$|\alpha_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000/000}$ باشد، باید $n \rangle 1000/000$؛ و هرگاه بخواهیم $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^9}$ کافی است مقادیر n در نامساوی $n > 10^9$ صدق کنند.

احمد: آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار $\frac{1}{100/000/000/000}$ (یک صد میلیاردم) نیز کم‌تر می‌شود.

دبیر: آری. کافی است که n را از ۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰ بزرگ‌تر بگیریم.

مثلاً: $n = 10^{11} + 1$. در این صورت:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{10^{11}+1} > \frac{1}{10^{11}}$$

احمد: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچک‌تر ای یکصدمیلیاردم نیز صادق است؟

دبیر: آری بر عدد کوچک (مانند $\varepsilon > 0$ اپسیلن) که انتخاب کنیم.

از شماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کم‌تر از ε است که در مثال بالا $\varepsilon = \frac{1}{10^{11}}$ اختیار شد.

اما چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک صدمیلیونم، یک میلیاردم و یا یکصد میلیاردم امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به ε شویم (بخوانید اپسیلن).

ε در واقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل دلخواه فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد: این بسیار جالب است. امّا شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟

دبیر: طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آن‌ها نامساوی

$$|\frac{1}{n}-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

برقرار باشد به ε بستگی خواهد داشت، برای نمونه وقتی $\varepsilon=\frac{1}{100}$، $M=101$ به دست آمد. یعنی هرگاه $n\geq 101$، $\frac{1}{n}<\frac{1}{100}$، M نماینده شماره مربوطه است.

وقتی $\varepsilon=\frac{1}{100}$، شماره مربوطه، یعنی $M=101$ به دست آمد.

وقتی $\varepsilon=\frac{1}{10^{11}}$ شماره مربوطه، یعنی $M=10^{11}+1$ به دست آمد، زیرا دیدیم از این شماره به بعد، یعنی هرگاه $n>10^{11}$ مثلاً $n=10^{11}+1$، $n=10^{11}+2$، $n=10^{11}+3$ و ...

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+1}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+2}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{10^{11}+3}<\frac{1}{10^{11}}=\varepsilon$$

و به طور کلی برای هر n که $n\geq 10^{11}+1$، $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ریاضی وار تر بیان کنیم:

برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک) ε فاصله α_nها از صفر از شماره‌ای مانند M به بعد کم‌تر از ε می‌شود.

به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند M هست که هرگاه $n\geq M$،

$$|\alpha_n-0|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

و بالاخره به این مفهوم کلیّت داده، و آن را برای هر دنباله دلخواه $\{\alpha_n\}$ و عددی حقیقی مانند L که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایشی دارند، بیان می‌کنیم:

تعریف:

گوییم دنباله $\{\alpha_n\}$ دارای حد L است، هرگاه برای هر عدد $\varepsilon > ۰$، عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n \geq M$، نابرابری $\| a_n - L \| < \varepsilon$ برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله $\{\alpha_n\}$ دارای حدی برابر L» با نماد ریاضی به شکل $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L$ نوشته و آن را چنین می‌خوانیم.

«حد دنباله α_n وقتی n به ∞ میل می‌کند برابر L است.»

یا آن‌که می‌گوییم «دنباله $\{\alpha_n\}$ به L همگراست». و در این صورت دنباله $\{\alpha_n\}$ را یک دنباله همگرا می‌نامیم.

وقتی برای دنباله‌ای مانند $\{\alpha_n\}$ چنین عددی حقیقی مانند L که در تعریف فوق صدق کند وجود نداشته باشد دنباله $\{\alpha_n\}$ را یک دنباله واگرا می‌نامیم.

مثال ـ دنباله $\{(-۱)^n\}_{n=۱}$ را در نظر می‌گیریم. جملات این دنباله یک در میان اعداد ۱- و ۱+ را اختیار می‌کنند. در واقع جملات این دنباله به عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه ۱- و ۱+ قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. امّا معلوم است که این دنباله همگرا نمی‌باشد، زیرا مقدار L می‌بایست یک عدد منحصر به فرد بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند. حال هرگاه $L = ۱$ اختیار کنیم جملات این دنباله با n های فرد هرگز به $L=۱$ (به مقدار دلخواه)نزدیک نمی شوند .همین وضعیت برای $L=-۱$ نیز صادق است.پس یک عدد مشخص L که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.

تمرین در کلاس

۱- توضیح دهید که چرا دنباله$a_n = ۲n + ۱$ همگرا نمی باشد.

۲- دنباله $۱, -\frac{۱}{۲}, ۲, -\frac{۲}{۳}, ۳, -\frac{۳}{۴}, ۴, -\frac{۴}{۵}, ۵, \ldots$

را در نظر بگیرید.ابتدا ضابطه این دنباله را معلوم کنید و از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

نکته: مسئله های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیدا کردن حد دنباله ها را می توان چنین طبقه بندی کرد

الف)مسئله هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

را محقق سازید. برای اثبات(۱) طبق تعریف می بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار است.

برای هر عدد $\in > ۰$ عدد طبیعی مانند M هست به قسمی که برای هر $n > M$، $|a_n - L| < \in$

در اثبات (۱)، $\in > ۰$ به عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسئله است.

M را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند:

اگر n عددی طبیعی و $n > M$ آنگاه، $|a_n - L| < \in$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره M به بعد جملات دنباله در نامساوی $|\alpha_n - L| < \varepsilon$ صدق کرده و لذا در اطراف L تجمع می‌کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری $|\alpha_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد و ε بر ما معلوم است، با این نابرابری کار می‌کنیم تا بتوانیم به نحوی M را پیدا کنیم.

ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد، مسأله‌هایی است که در آن L بر ما معلوم نیست. در واقع در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنان‌چه فکر می‌کنید دنباله مورد نظر همگراست ابتدا L را حدسیه‌سازی کنید و سپس در صورت واقعیت امر و درست بودن حدسیه‌تان، مطابق بند الف تساوی حدی $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L$ را ثابت کنید.

ضمناً همیشه یادتان باشد که:

> تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است، از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

مثال ۱ ـ همگرایی دنباله $\left\{ ۳ - (\frac{۱}{۲})^n \right\}_{n=۱}$ را بررسی کنید.

حل: باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا واگرا؛ و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می‌کنیم که جملات دنباله، برای nهای به قدر کافی بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آنست که مقدارهای $(\frac{۱}{۲})^n$ برای nهای بزرگ کوچک و کوچک‌تر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شوند.

حدس: $\lim\limits_{n\to\infty} (۳ - (\frac{۱}{۲})^n) = ۳$ ، در اینجا $L = ۳$.

اثبات: فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ عدد دلخواهی باشد. باید Mی پیدا کنیم که

(۱) برای هر n که $n \ge M$، $\left| (۳ - (\frac{۱}{۲})^n) - ۳ \right| < \varepsilon$.

داریم:

$$\left| (۳ - (\frac{۱}{۲})^n) - ۳ \right| < (\frac{۱}{۲})^n$$

در نتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره‌ای به بعد نابرابری $(\frac{۱}{۲})^n < \varepsilon$ برقرار می‌گردد و همین شماره مورد نظر مجهول M را به دست می‌دهد. این نابرابری معادل نابرابری

$$۲^n > \frac{۱}{\varepsilon}$$

است. از طرفین لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم

$$n > \log_۲ \frac{۱}{۴}$$

چون معلوم نیست که $\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}$ عددی طبیعی باشد، M را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$M = \left[\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon} \right] + ۱$$

و بدین ترتیب مجهول M به دست می‌آید.

احمد: از کجا معلوم است که این مقدار M در گزاره شرطی (۱) صدق می‌کند؟

دبیر: می‌توانیم M را آزمون نماییم. برای این کار فرض کنیم n عددی طبیعی و $n > M$ باید نشان دهیم.

$$|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳|<\varepsilon$$

در این‌جا $\alpha_n = ۳-(\frac{۱}{۲})^n$ چون:

$$n \geq M = \left[\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$$

و برای هر x، $[x]+۱ > x$، پس

$$n > \log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}$$

در نتیجه

$$۲^n > ۲^{\log_۲ \frac{۱}{\varepsilon}} = \frac{۱}{\varepsilon}$$

با وارد کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می‌کند:

$$\frac{۱}{۲^n} < \varepsilon$$

و یا

$$(\frac{۱}{۲})^n < \varepsilon$$

امّا

$$\left|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳\right| = (\frac{۱}{۲})^n < \varepsilon$$

یعنی n در نابرابری (۲) صدق می‌کند.

محسن: نیازی به آزمایش M نیست زیرا برای یافتن M، همه عملیات برگشت پذیرند.

دبیر: درست است، اگر توجه به برگشت‌پذیری عملیات و کار با نابرابری‌ها بکنید لزومی به آزمایش M به دست آمده نمی‌باشد.

مثال ۲ ـ آیا دنباله $\alpha_n = \sin n\frac{\pi}{۲}$ همگراست؟

حل ـ برخی مقادیر این دنباله را بررسی می‌کنیم.

$$n=۱\ ,\ \alpha_{۱}=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

$$n=۲\ ,\ \alpha_{۲}=\sin\pi=۰$$

$$n=۳\ ,\ \alpha_{۳}=\sin\frac{۳\pi}{۲}=-۱$$

$$n=۴\ ,\ \alpha_{۴}=\sin ۲\pi=۰$$

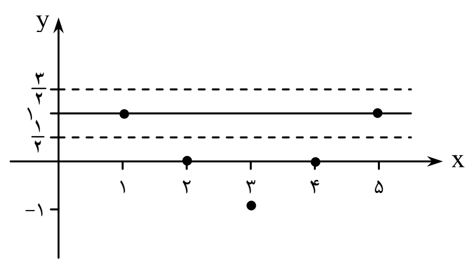
$$n=۵\ ,\ \alpha_{۵}=\sin\frac{۵\pi}{۲}=\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۲})=۱$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقدارهای این دنباله منحصر به اعداد ۱ ، ۰ و ۱− هستند.

پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد: بسیاری از جملات دنباله برابر ۱ بوده و لذا در ۱ مجتمع می‌شوند آیا ممکن نیست که دنباله همگرا به عدد ۱ باشد.

دبیر: خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است. کافی است بازه‌ای مانند $(۱-\frac{۱}{۲},۱+\frac{۱}{۲})$ یعنی نـواری به مرکز ۱ و شعاع $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$ را حول خط $y=۱$ در نظر بگیریم. (شکل زیر)



هـر چـه‌قـدر M را بـزرگ اختیـار کنـیم همیشـه $n\geq M$ را نمـی‌تـوان بـه صـورت $n=۲k$ در نظـر گرفـت و لـذا $\alpha_{۲k}=\sin k\pi=۰$.

احمد: امّا تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر ۱ بوده و لذا در بازه $(۱-\frac{۱}{۲}\ ,\ ۱+\frac{۱}{۲})$ هستند.

دبیر: درست است. امّا اگر بخواهد تساوی حدی $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\frac{n\pi}{۲}=۱$ اتفاق بیتـد بایـد نظیـر $(۱-\varepsilon\ ,\ ۱+\varepsilon)$ کـه در این‌جا $\varepsilon=\frac{۱}{۲}$، طبـق تعریـف Mی یافـت شـود کـه بـرای هـر n کـه $n\geq M$، $\alpha_n\in(۱-\varepsilon\ ,\ ۱+\varepsilon)$ (و یـا $|\alpha_n-۱|<\varepsilon$).

توجه کنید که این یک حکم کلی است: برای هر n که $n \geq M$ باید نابرابری برقرار باشد؛ در حالی که گفته شد هر چه‌قدر که M را اختیار کنیم nهایی‌ست، که $n = ۲k$ امّا $n \geq M$ زیرا $|\alpha_n - ۱| \geq \in = \frac{۱}{۲}$

$a_n \notin (۱ - \frac{۱}{۲}, ۱ + \frac{۱}{۲})$؛ و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

مسائل

۱- (الف) ابتدا حد دنباله $\{\frac{n-۱}{n}\}_{n=۱}$ را حدس بزنید. (ب) سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

۲- در مورد دنباله $\left\{\sin ۲\frac{\pi}{n}\right\}_{n=۱}$ ثابت کنید که این دنباله به عدد ۱- همگرا نمی‌باشد.

۳- (مفهوم زیر دنباله) در مورد دنباله $a_n = \sin n\frac{\pi}{۴}$، جملاتی از دنباله را اختیار کنید و از آن یک دنباله نامتناهی بسازید مانند:

$$a_۲ \ , \ a_۴ \ , \ a_۶ \ , \ ....$$

آیا این اعداد خود یک دنباله می‌سازند؟

$\{a_{۲n}\}_{n=۱}$ را امتحان کنید.

دنباله $\{a_{۲n}\}_{n=۱}$ را یک زیر دنباله دنباله $\{a_n\}_{n=۱}$ می‌نامیم.

نشان دهید که دنباله $\{a_{۲n}\}_{n=۱}$ همگراست.

۴- یک زیر دنباله از دنباله $\left\{\cos n\frac{\pi}{۲}\right\}_{n=۱}$ بسازید که همگرا باشد.

۵- فرض کنیم $\{a_n\}_{n=۱}$ یک دنباله دلخواه و $\{a_{k_n}\}_{n=۱}$ یک زیر دنباله از دنباله $\{a_n\}_{n=۱}$ باشد که در آن k_n دنباله‌ای صعودی از اعداد طبیعی است.

ثابت کنید هرگاه $\{a_n\}_{n=۱}$ همگرا باشد. $\{a_{k_n}\}$ نیز همگراست.

۶- فرض کنیم $\{a_n\}_{n=۱}$ یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم k عددی صحیح و ثابت باشد به قسمی که دنباله را چنین تعریف می‌کنیم.

$$b_n = a_{n+k}$$

برای مثال هرگاه $k = ۲$ و

$$\alpha_۱, \alpha_۲, \alpha_۳, \alpha_۴, ..., \alpha_n, \alpha_{n+۱}, \alpha_{n+۲}, ...$$

دنباله $\{\alpha_n\}$ باشد دنباله $\{b_n\}$ چنین است:

$$b_۱ = a_۳ \ , \ b_۲ = a_۴ \ , \ b_۳ = a_۵ \ , \ ... \ b_n = a_{n+۲} \ , \ ...$$

یعنی:

$$\alpha_۳ \ , \ \alpha_۴ \ , \ \alpha_۵ \ , \ ... \ \alpha_{n+۲} \ , \ ....$$

همان دنباله $\{b_n\}_{n=۱}$ است. ثابت کنید هرگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ آنگاه $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

۷- فرض کنیم $\{p_n\}_{n=۱}$ یک دنباله همگرا و

$$p_{n+۱} = \frac{bp_n}{\alpha + p_n}$$

که در آن α و b اعدادی ثابت‌اند. با استفاده از مسأله ۷ حد دنباله $\{p_n\}_{n=۱}$ را به دست آورید.

۸- کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگراست. آن‌هایی را که فکر می‌کنید همگرا هستند، حد آن‌ها را حدس زده و اثبات کنید. آن‌هایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، و واگرایی این دنباله را توضیح دهید.

الف) $\left\{(\frac{۱}{۳})^{n-۱}\right\}_{n=۱}$ ب) $\{۳^n\}_{n=۱}$

ج) $\{\log n\}_{n=۱}$ د) $\left\{\log\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}$

کسانی‌که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد فقید دکتر غلامحسین مصاحب (۱۲۸۴-۱۳۵۸).

۲-۶. دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$. دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم‌بندی کرد:

دنباله‌هایی مانند $\{(-۱)^n\}_{n=۱}$ که برای آن‌ها هیچ عدد حقیقی، و $\pm\infty$ یافت نمی‌شود به طوری $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = L$.

دنباله‌های واگرایی مانند $\{۲n\}_{n=۱}$ گرچه جملات دنباله، برای nهای بزرگ، حول یک عدد حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوش‌رفتار است!

ادعای ما از خوش‌رفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای nهای بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به n) ملاحظه می‌کنیم که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که بخواهیم بزرگ‌تر می‌شود و این یک نوع خوش‌رفتاریست!

مثلاً هرگاه بخواهیم $۲n > ۱۰^۶$ کافی است $n > ۵۰۰/۰۰۰$.

هرگاه بخواهیم $۲n > ۱۰^۸$ کافی است $n > ۵۰/۰۰۰/۰۰۰$.

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره ۵۰/۰۰۰/۰۰۰ به بعد از عدد (از پیش تعیین شده) ۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰ بزرگ‌ترند؟ زیرا از $n > ۵۰/۰۰۰/۰۰۰$ نتیجه می‌گیریم که $۲n > ۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰$.

به طور کلی فرض کنیم k عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد، برای آن‌که $۲n > k$ کافی است $n > \frac{k}{۲}$ و چون می‌خواهیم n طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که $n > \left[\frac{k}{۲}\right] + ۱$ اختیار کنیم زیرا واقع است که $\left[\frac{k}{۲}\right] + ۱ > \frac{k}{۲}$.

حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارائه دهیم.

تعریف ـ گوییم دنباله $\{\alpha_n\}_{n=۱}$ واگرا به ∞ (یا $+\infty$) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار باشد.
برای هر عدد حقیقی مثبت k عددی طبیعی مانند N یافت شود به قسمتی که هرگاه $n > N$، $\alpha_n > k$.
در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

به زبان ساده، واگرایی به ∞ دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ) k، از شماره‌ای به بعد همه جملات از k بزرگ‌ترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به ∞ حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ اتفاق بیفتد. جملات دنباله، از جایی به بعد الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش ∞ گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی‌اند، لیکن از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگ‌تر می‌شوند:

تعریف

گوییم دنباله $\{\alpha_n\}_{n=۱}$ واگرا به $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = -\infty$ هرگاه گزاره ذیل برقرار باشد:
برای هر عدد حقیقی منفی k، عددی طبیعی مانند N وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n > N$، آنگاه $a_n < k$.

پس هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = -\infty$ اتفاق افتد جملات دنباله می‌بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگ‌تر شوند.

آیا دنباله‌ای که جملات آن به صورت نوسانی مثبت و منفی می‌شوند می‌توانند واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ باشد؟

فعالیت کلاسی:

الف) ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدام‌یک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است. ب) حدس خود را ثابت کنید.

۱. $\{[n^۲]\}_{n=۱}^{\infty}$　　۲. $\{۱۰۰۰-n^۲\}_{n=۱}^{\infty}$　　۳. $\{\frac{۱}{۱۰^۶}-(n+۱)\}_{n=۱}^{\infty}$

برای نمونه و راهنمایی به(۱) می‌پردازیم.

وقتی مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، قطعاً $n^۲$ نیز بزرگ‌تر می‌شود. در نتیجه $[n^۲]$ نیز افزایش می‌یابد؛ زیرا

$$(*)\ [n^۲] > n^۲ - ۱$$

پس حدسمان این است که $\lim\limits_{n\to\infty}[n^۲] = +\infty \quad (۱)$

اثبات (۱): فرض کنیم $k > ۰$ عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره‌ای به بعد $[n^۲] > k$ پس مجهول، شماره‌ای مانند N است که هرگاه $[n^۲] > k, n \geq N$. در اینجا k معلوم مسأله است.

می‌توانیم فرض کنیم که عدد معلوم k چنان است که $k > ۲$ (چرا؟)

بنابر (*) برای آنکه $[n^۲] > k$ کافی است نامساوی $n^۲ - ۱ > k$ را حل کنیم .

اما این نامساوی معادل $n^۲ > ۱ + k$ و یا $n > \sqrt{۱+k}$ می‌باشد. می‌توانیم شماره N مجهول را $N = \sqrt{۱+k}$ اختیار کنیم، اما ممکن است $\sqrt{۱+k}$ عدد طبیعی نباشد. پس $[\sqrt{۱+k}]$ را اختیار می‌کنیم. امّا اگر $n > [\sqrt{۱+k}]$ معلوم نیست که $n > \sqrt{۱+k}$ لذا $N=[\sqrt{۱+K}]+۱$ را به عنوان شماره مجهول انتخاب می‌کنیم.

می‌توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم: فرض کنیم $n > N=[\sqrt{۱+K}]+۱$ پس $n > \sqrt{۱+k}$.

در نتیجه

$n^۲ > ۱ + k$ امّا

$[n^۲]+۱ > n^۲$؛ در نتیجه $[n^۲]+۱ > ۱+k$ و یا $\alpha_n = [n^۲] > k$

یک بار دیگر حل مسأله را به اختصار مرور می‌کنیم.

ادعا داشتیم که $\lim\limits_{n\to\infty} [n^۲] = +\infty$. برای اثبات این ادعا می‌بایست ثابت کنیم.

(**) برای هر عدد $(k > ۲)k$ هست که هرگاه N $[n^۲] > k, n > N$

در اثبات (**) . k معلوم و N مجهول است. N باید چنان پیدا شود که برای هر $n > N$ باید $[n^۲] > k$.

با استفاده از خواص تابع جزءِ صحیح از نامساوی $[n^۲] > k$ ، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به $N = [\sqrt{۱+k}] + ۱$ به عنوان شماره مجهول رسیدیم.

یادتان باشد، که در حل مسأله‌های مربوط به حد دنباله‌ها:

استفاده از خواص نابرابری‌ها و درک صحیح گزاره‌های شرطی اگر . . . آنگاه در یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

مسائل

۱.ثابت کنید

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^۲+۱}{n} = \infty$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} (-۱)^n \frac{n^۲-۱}{n}$ موجود نیست.

۲. ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{\alpha_n} = ۰$

۳. فرض کنیم همواره $\alpha_n > ۰$، $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{\alpha_n} = ۰$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$

۴. فرض کنیم همواره $\alpha_n < ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{\alpha_n} = ۰$ ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = -\infty$

۵. فرض کنیم
$$\alpha_n = \frac{۵n^۲ - ۳n + ۱۱}{۲n + ۱}$$
$$b_n = \frac{n^۲ - ۱}{۶n^۳ + ۱} \quad و \quad c_n = \frac{۳n^۲ + ۱}{۲n^۲ + ۷}$$
دنباله‌هایی از اعداد باشند . ثابت کنید.
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad و \quad \lim_{n\to\infty} b_n = ۰ \quad و \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{۳}{۲}$$

۲-۷ اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی R دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم نابه‌سامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این نابه‌سامانی تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن و ایراشتراس توانست به رفع آن نایل شود. و ایراشتراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب و دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های R است که دستگاه اعداد گویا، یعنی Q را بررسی می‌کنیم.، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت ، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد امّا به لحاظ نظری اثبات آن ناممکن جلوه می‌کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های R بیان می‌کنیم که منبعث از رابطه‌ی ترتیبی روی R می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R باشد.

تعریف۱ـ عدد حقیقی U را یک کران بالای A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ ، $x \le u$.

$a \in R$ را کوچکترین کران بالای A می‌نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند U، $a \le u$.

مشابهاً می‌توانیم از پایین به مجموعه A نگاه کنیم.

تعریف ۲ ـ عدد حقیقی v را یک کران پایین A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$,$v \le x$.

$b \in R$ را بزرگترین کران پایین A می‌نامیم هرگاه یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین دیگر A مانند v ، $v \le b$.

کوچک‌ترین کران بالا را سوپرموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم نیز می‌نامند.

دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!

برای مثال، فرض کنیم $A = [۱,۲]$: در این صورت ۳ یک کران بالای A است.

۳/۵ نیز یک کران بالای A است.

۲/۵ چطور؟ A چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای A کدام است؟ آری $a = ۲$ کوچکترین کران بالای A است.

مشابهاً به آسانی معلوم است که $b = ۱$ بزرگترین کران بالای A است.

در این مثال هم a و هم b به A تعلق دارند. امّا ممکن است کوچک‌ترین کران بالا و یا بزرگترین کران بین یک مجموعه به آن مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه $B = (۱,۲)$ (بازه باز)، آنگاه کوچکترین کران بالای B برابر ۲ و بزرگترین کران پایین B نیز برابر ۱ است، در حالی هیچیک به B تعلق ندارند.

(چرا؟)

سؤال– آیا همه‌ی زیر مجموعه‌های ناتهی R دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هستند؟

نظرتان را در مورد $A = [۱,\infty)$ و $B = (-\infty, ۲)$ بیان کنید.

فعالیت کلاسی

الف) در مورد احکام ذیل فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید؛ اگر فکر می‌کنید درست‌اند آن‌ها را توضیح دهید.

و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید!

۱. هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.

۲. هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.

۳. هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین کران پایین دارد.

۴. هرگاه $B \supseteq A \neq \phi$ و $\bigcup \in R$ یک کران بالای B باشد، u یک کران بالای A نیز می‌باشد.

۵. حکمی نظیر (۴) در باب کران‌های پایین پیدا کنید.

اکنون اصل موضوع تمامیت را بیان می‌کنیم. باید توجه داشت، «اصل موضوع» و یا اختصاراً «اصل» در ریاضیات به گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود.

اصل موضوع تمامیت در باب اعداد حقیقی

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچک‌ترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگ‌ترین کران پایین است.

با استفاده از این اصل، اکنون به اثبات مهم‌ترین قضیه‌ی این فصل می‌پردازیم.

قضیه ۱: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد. در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

اثبات: قرار می‌دهیم $S = \{a_n | n \in N\}$ یعنی S مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد نیاز مورد بحث است.

پس $S \neq \phi$ دارای S کران بالایی مانند K است.

بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچک‌ترین کران بالاست. این کوچک‌ترین کران بالای S را L می‌نامیم. نشان می‌دهیم که $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = L$. برای هر n، $a_n \leq L$ حال فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ عدد دلخواهی باشد. پس $L = \varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L, L - \varepsilon < L$ کوچک‌ترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L - \varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند α_N وجود دارد به طوری که $L - \varepsilon < a_n$ حال برای هر $n > N$

$$\alpha_n > \alpha_N > L - \varepsilon$$

از طرف دیگر $\alpha_n < L$ در نتیجه برای هر n که $n > N$

$$L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$$

یعنی برای هر $n > N$

$$|\alpha_n - L| < \varepsilon$$

پس $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ همچنان که ادّعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به دست می‌آید! آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲: هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

مثال: ثابت کنید دنباله $\{\sin\frac{\pi}{۲n}\}_{n=۱}$ همگراست.

حل– با توجه به شناختی از رفتار تابع $y=\sin\frac{\pi}{۲n}$ به ویژه در بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ داریم، معلوم است که این دنباله یک دنباله نزولی است. به علاوه برای هر n

$۰ < \sin\frac{\pi}{۲n}$ پس عدد ۰ یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲ این دنباله همگراست.

تمرین در کلاس

۱. ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند.

الف) $\{۱+\frac{۱}{n^{۲}+۱}\}$　　　ب) $\{۱-\frac{۱}{n}\}$

سپس حد آن‌ها را محاسبه کنید.

۲. دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$\alpha_۱ = ۱\ ,\ \alpha_{n+۱} = \sqrt{۶+\alpha_n}\ (n = ۱,۲,۳,.......)$$

الف) ثابت کنید که این دنباله همگراست.

ب) حد این دنباله را بدست آورید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

قضیه: هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

اثبات: فرض کنیم u عددی گویا است. قرار می‌دهیم $u_n = u$ برای هر $n \in N$

پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای u بوده و معلوم است که $\lim_{n\to\infty} u_n = u$

حالت دوم: u عددی گنگ است، بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم.

$$u = u_۰ / u_۱u_۲u_۳......u_n$$

که در آن $u_۰$ جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون گنگ است بسط اعشاری u نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$r_۱ = u_۰ / u_۱$$
$$r_۲ = u_۰ / u_۱ u_۲$$

$r_n = u = u_٠ / u_١ u_٢ ......u_n$

لذا هر r_n عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد: به علاوه

$$٠ < u - r_n = ٠/\overbrace{٠٠.........٠}^{n} \quad u_{n+١}u_{n+٢}...$$

در نتیجه:

$$\left|١٠^n\right|u - r_n| = / u_{n+١}.......u_{n+k}......... < ١$$

و یا

$$٠ < |u - r_n| < -$$

چون $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{١}{١٠^n} = ٠$ به ازای عدد دلخواه $\varepsilon > ٠$, N است که برای هر $n > N$, $\frac{١}{١٠^n} < \varepsilon$ در نتیجه برای هر n که $n > N$

$$|u - r_n| < \frac{١}{١٠^n} < \varepsilon \qquad \text{یعنی} \qquad \lim_{n\to\infty} r_n = u$$

یکی از کاربردهای این قضیه، استفاده از آن برای تعریف توان اعداد به نمای گنگ است. فرض کنیم a عـددی مثبـت و x عددی گنگ باشد. بنابر قضیه فوق دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از اعداد گویا است که $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ، اینک تـوان α^x را چنین تعریف می‌کنیم. $\alpha^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$

چون توان اعداد گویا تعریف شده است، پس a^x (a به نمای گنگ) تعریف شده است.

قواعد آشنای توان که برای اعداد گویا برقرار است به توان‌های گنگ نیز منتقل می‌شود.

فرض کنیم y ،x دو عدد گنگ باشند. لذا دنباله‌ای از اعداد گویا مانند $\{y_n\}$ است که $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$

$$a^x.a^y = (\lim_{n\to\infty} a^{x_n})(\lim_{n\to\infty} a^{y_n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} (a^{x_n} a^{y_n})$$

(چون x_n و y_n گویا هستند)

$$= \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n}$$

$$= \alpha^{\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n)}$$

$$= \alpha^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

$$= \alpha^{x+y}$$

یادداشت دانش‌آموز

خواندنی

۲- یک دنباله مهم

دنباله زیر را در نظر می‌گیریم

$$: ۲,(\frac{۳}{۲})^{۲},(\frac{۴}{۳})^{۳},(\frac{۵}{۴})^{۴},(\frac{۶}{۵})^{۵},.....\ \{(۱+\frac{۱}{n})^{n}\}^{\infty}$$

این دنباله هم به لحاظ کاربردی و هم‌چنین از جنبه‌ی نظری اهمیت فوق‌العاده دارد.
چرا؟ ثابت می‌شود این دنباله همگرا است و هرگاه حد آن را e بنامیم، یعنی

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^{n}=e$$

عدد حقیقی e به صورتی طبیعی، در بیشتر پدیده‌های خلقت ظاهر می‌شود. دو دسته از مهم‌ترین پدیده‌ها فرآیندهای رشد و زوال هستند. در اولی کمیت مورد مطالعه (نسبت به زمان) رشد می‌کند و در پدیده‌ی دوم کمیت مورد بحث رو به زوال دارد. برای مثال: وقتی تعداد اندکی باکتری را در محیطی مناسب قرار می‌دهیم، به شدت رشد کرده و پس از زمان اندکی تعداد آه‌ها ۲و۳ و یا صد برابر می‌شود. در حالی هرگاه مقداری ماده رادیو اکتیویته مانند فلزهای اورانیوم، پلوتونیوم، و یا انشتانیوم را داشته باشیم، پس از مدتی مقدار آن کاهش یافته، یعنی بخشی از ماده زوال یافته به عناصر دیگری مبدل می‌گردد. عدد e در چنین پدیده‌هایی نقش اساسی دارد، به گونه‌ای که در محاسبات مربوط به رشد و زوال به صورت طبیعی بروز می‌کند. e در اقتصاد نیز مطرح می‌شود. از این بابت لگاریتمی که پایه‌ی عدد e باشد لگاریتم طبیعی نامیده می‌شود.

اثبات همگرایی دنباله $\{(۱+\frac{۱}{n})^{n}\}$ بر اساس اصل موضوع تمامیت امکان‌پذیر است. ابتدا ثابت می‌کنیم که این دنباله صعودی است سپس ثابت می‌کنیم که این دنباله از بالا کراندار است. مثلاً برای هر n, $(۱+\frac{۱}{n})^{n}\leq ۴$

ابتدا یک قضیه کمکی ثابت می‌کنیم.

***قضیه۲:** دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n=(۱-\frac{۱}{n})^{n}$ صعودی است.*

***اثبات:** ثابت می‌کنیم برای هر n, $\frac{b_{n+۱}}{b_n}>۱$ داریم.*

$$\frac{b_{n+۱}}{b_n}=\frac{(۱-\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱-\frac{۱}{n})^{n}}=\frac{(۱-\frac{۱}{n+۱})^{n+۱}}{(۱-\frac{۱}{n})^{n+۱}}\times(۱-\frac{۱}{n})$$

$$=\left[\frac{\frac{n}{n+۱}}{\frac{n-۱}{n}}\right]^{n+۱}\times(۱-\frac{۱}{n})=(\frac{n^{۲}}{n^{۲}-۱})^{n+۱}\times(۱-\frac{۱}{n})$$

$$= (1+\frac{1}{n^{2-1}})^{n+1}(1-\frac{1}{n})$$

(بنابر نامساوی برنولی: $(1+\frac{1}{n^2-1})^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n^2-1}$

بنابراین $> (1+\frac{n+1}{n^2-1})(1-\frac{1}{n})$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > (1+\frac{1}{n-1})(1-\frac{1}{n}) = 1$$

قضیه ۳: *دنباله* $\{a_n\}$ *با ضابطه‌ی:* $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *صعودی است.*

اثبات: *کافی است ثابت کنیم برای هر* n, $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} > 1$ *داریم.*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = (\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}})^{n+1} \times (1+\frac{1}{n})$$

(بنابر نا مساوی برنولی)

$$= (\frac{n^2+2n}{(n+1)^2})^{n+1} \times (1+\frac{1}{n}) = (1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})$$

$$> (1-\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n}) = 1$$

چون $\alpha_1 = 2$ *و دنباله‌ی* $\{\alpha_n\}$ *صعودی است پس برای هر* $n \geq 2$, $\alpha_n > 2$

قضیه ۴: *دنباله‌ی* $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *از بالا کراندار است.*

اثبات: *بنابر قضیه‌ی قبل دنباله* $\{b_n\}$ *با ضابطه‌ی* $b_n = (1-\frac{1}{n})^n$ *صعودی است.*

چون $b_2 = \frac{1}{4}$ *پس برای هر* n, $b_n > \frac{1}{4}$ *از اینجا نتیجه می‌گیریم که برای هر* n

$$\alpha_n b_n > \alpha_n \times \frac{1}{4}$$

$$\alpha_n b_n = (1+\frac{1}{n})^n (1-\frac{1}{n})^n$$

$$= (1 - \frac{1}{n^2})^n < 1$$

در نتیجه $\alpha_n \times \frac{1}{4} < 1$ و یا $\alpha_n < 4$

نتیجه ۱ *- دنباله* $\alpha_n = (1+\frac{1}{n})^2$ *صعودی و از بالا کراندار است پس طبق قضیه(۱)همگرا است.*

نتیجه ۲ *- حد دنباله* α_n *را* e *می‌نامیم، یعنی* $\lim\limits_{n\to\infty} = (1+\frac{1}{n})^n = e$

ضمناً برای هر n $2 < \alpha_n < 4$ *لذا* $2 < \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \le 4$ *یعنی* $2 \le e \le 4$

و ثابت می‌شود که عدد نیز یک کران بالای دنباله $\{a_n\}$ *است. پس* $2 < e < 3$

مثال- ثابت کنید که دنباله $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ *نزولی است.*

حل *- کافی است ثابت کنیم که* $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$ *داریم.*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)^{n+1} \frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}$$

و اما طبق نامساوی برنولی داریم:

بنابراین

$$(1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+1} \ge 1+\frac{n+1}{n(n+2)} > 1+\frac{n+1}{(n+1)^2} = 1+\frac{1}{n+1}$$

در نتیجه

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > (1+\frac{1}{n+1}) \times \frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})} = 1$$

و یا $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$

تمرین در کلاس

۱. حد دنباله‌های زیر را حدس بزنید.

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$$

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{3n}$$

$$c_n = (۱+\frac{۱}{n})^{\frac{n}{۲}}$$

راهنمایی ـ از قاعده توان‌های مکرر استفاده کنید:

$$[(a)^{\alpha}]^{\beta} = (a)^{a\beta}$$

۲. از ماشین‌حساب و رایانه خود کمک بگیرید و عدد e را تا ۱۰ رقم اعشار به دست آورید.

۳. حاصل $(۱+۰/۰۱)^{۱۰۰}$ را به دست آورید و با عدد e مقایسه کنید.

۴. حاصل $(۱+\frac{۱}{۳۶۵})^{۳۶۵}$ را به دست آورید وبا عدد e مقایسه کنید.

لئونارد اویلر (Leonard Euler)

ریاضیدان مشهور آلمانی که کارهای زیادی در زمینه‌های مختلف ریاضیات از جمله جبر، آنـالیز، توپولـوژی و هندسـه انجـام داده است. اویلر ریاضیدانی بسیار پرکار بوده است؛ بیش از ۵۷۰ کتاب و مقاله در عالم ریاضیات در زمان حیات پربار خـود بـه رشته‌ی تحریر درآورده است.

برخی او را سودمندترین ریاضیدان همه قرون و اعصار دانسته‌اند. انتخاب حرف e برای عـدد $\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$ ، کـه آن را عدد نِپِر می‌نامند، به افتخار اویلر از حروف اول اویلر (Euler) اقتباس شده است.

۲-۹ جبر دنباله‌ها

دنباله‌های عددی، را می‌توان همانند اعداد با هم جمع یا تفریق کرد و دنباله جدیدی به نام مجموع یا تفاضل (دو دنبالـه) بـه دست آورد. همچنین دو دنباله عددی را می‌توان در هم ضرب کرد و دنباله حاصل‌ضرب را به دست آورد. در مورد تقسیم نیـز تحت شرایطی می‌توان دو دنباله را بر هم تقسیم کرد.

تعریف- فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند در این صورت دنباله‌های
$\{a_n+b_n\}\{a_n-b_n\}$, $\{a_n.b_n\}$ را خواهیم داشت، جمله‌ی n ام دنباله $\{a_n+b_n\}$ همان حاصل‌جمع عددی b_n, a_n است.
همگرایی دنباله‌های $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ به آسانی به همگرایی دنباله‌های به دست آمده منتقل می‌شود.

قضیه ۵- فرض کنیم $\{\alpha_n\}, \{b_n\}$ دو دنباله همگرا باشند. در این صورت
الف) دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$, $\{a_n.b_n\}, \{c.a_n\}$ (c عددی ثابت) همگرا هستند. به علاوه

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n . \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

ب) هرگاه $\lim_{n\to\infty} b_n \neq ۰$ ، دنباله $\{\frac{a_n}{a_n}\}$ نیز همگرا است و $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\alpha_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

قضیه ۶- (قضیه فشردگی) فرض کنیم $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ دو دنباله و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ، همچنین فرض کنیم $\{c_n\}$ دنباله‌ای باشد به قسمتی که برای هر n, $a_n \le c_n \le b_n$ که در این صورت دنباله $\{c_n\}$ نیز همگراست و

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

اثبات- فرض کنیم $\varepsilon > ۰$ عدد مفروض دلخواهی باشد. چون $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$ از شماره ای مانند $N_۱$ به بعد

$$(۱)|b_n - L| < \varepsilon$$

همچنین چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ از شماره‌ای مانند $N_۲$ به بعد $(۲)|\alpha_n - L| < \varepsilon$

حال فرض کنیم $N = \max\{N_۱, N_۲\}$ و n عدد طبیعی دلخواهی باشد که $n > N$ ، پس $n > N_۱, n \rangle N_۲$ ، و روابط (۱) ، (۲) با هم برقرارند و داریم.

$$b_n < L + \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < a_n \qquad \text{(چرا؟)}$$

امّا برای هر n ، $a_n \le c_n < b_n$ لذا برای هر n که $n > N$.

$$L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$$

یعنی $|c_n - L| < \varepsilon$ در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$

مثال- می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n^k} = ۰$ که در آن k عددی طبیعی است. در همگرایی دنباله‌های زیر بحث کنید

الف) $\{\frac{۲n^۲ - n - ۱}{۵n^۲ + n - ۳}\}$ ب) $\{\frac{\cos n}{n}\}$

حل- (الف) داریم

$$\frac{۲n^۲ - n - ۱}{۵n^۲ + n - ۳} = \frac{۲ - \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n^۲}}{۵ + \frac{۱}{n} - \frac{۳}{n^۲}}$$

امّا

$$\lim_{n\to\infty}(۲ - \frac{۱}{n} - \frac{۱}{n^۲}) = \lim_{n\to\infty} ۲ - \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}$$
$$= ۲ - ۰ - ۰ = ۲$$
$$\lim_{n\to\infty}(۵ + \frac{۱}{n} - \frac{۳}{n^۲}) = \lim_{n\to\infty} ۵ + \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n} - ۳\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n^۲}$$
$$= ۵ + ۰ - = ۵$$

در نتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-n-1}{5n^2+n-3}=\frac{2}{5}$

ب) می‌دانیم همواره $-1 \le \cos\chi \le 1$ در نتیجه برای هر عدد طبیعی n ،

چون $-\frac{1}{n} \le \frac{\cos x}{n} \le \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0 \quad , \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) = 0$

مسائل- در باب هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله مورد نظر

الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.

ب) جملات دنباله مثبت یا منفی‌اند.

ج) صعودی یا نزولی و یا نوسانی‌اند.

د) همگرا یا واگرا است؛ و اگر واگراست به $+\infty$ واگراست یا $-\infty$ و یا هیچ یک.

۱. $\{\frac{5n^2}{n^2+1}\}$ ۲. $\{\frac{2n}{n^2+1}\}$

۳. $\{4+\frac{(-1)^n}{n}\}$ ۴. $\{\sin\frac{1}{n}\}$

۵. $\{\frac{n^2-1}{n}\}$ ۶. $\{\frac{\sin n}{n}\}$

۷. $\{n\cos\frac{n\pi}{2}\}$ ۸. $\{n\sin\frac{n\pi}{2}\}$

۹. $\{n\cos\frac{(-1)^n}{n}\}$

۱۰. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

۱۱. همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\{\frac{n^2-1}{n}\}$ ب) $\{(-1)^n \frac{n+1}{n}\}$ ج) $\{\frac{n}{\sqrt{n+1}}\}$

۱۲. فرض کنیم $\{\alpha_n\}$ یک دنباله همگرا و برای هر n داشته باشیم $100a_n = 452 + a_n$ حد این دنباله را پیدا کنید.

۱۳. فرض کنیم دنباله $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به قسمتی که $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n}$ حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید.

۱۴. حد دنباله‌های زیر را بدست آورید.

$a_n = (۱+\frac{۱}{n})^{۲n}$ $\qquad$ $b_n = (۱+\frac{۱}{n})^{\frac{n}{۲}}$

راهنمایی- از این قضیه که هرگاه $\lim_{n\to\beta} \alpha_n = \alpha \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ دو دنباله همگرا باشند، دنباله $\alpha_n^{\beta n}$ نیز همگراست و $\lim_{n\to\infty} [a_n^{\beta n}] = [\lim_{n\to\infty} \alpha_n]^{\lim_{n\to\infty} \beta n}$ استفاده کنید.

g در بازه $[\pi, ۳\pi]$